

VEKTORANALYSIS

VON

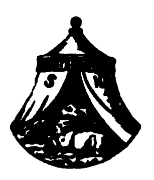
C. RUNGE

ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

*

BAND I:
DIE VEKTORANALYSIS DES
DREIDIMENSIONALEN
RAUMES

*



VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

VORREDE

Die heutige Vektoranalysis ist im wesentlichen aus zwei Werken entsprungen, aus Graßmanns Ausdehnungslehre und aus Hamiltons Quaternionen, beide reiche Quellen mathematischer Erkenntnis. Beiden Werken ist keine große Verbreitung zuteil geworden. Hamilton hat zwar Schule gemacht, aber die Zahl derer, die sich die Quaternionen zu eigen gemacht haben, so daß sie ihnen ein brauchbares Werkzeug wurden, ist beschränkt geblieben. Graßmanns Werk hat zunächst gar keine Beachtung gefunden, und noch heute wird es wenig studiert. Nur Bruchstücke sind in den mathematischen Unterricht eingedrungen und in den exakten Naturwissenschaften zum dauernden Besitz des Forschers geworden. Meiner Meinung nach ist dieser Prozeß, was Graßmann betrifft, noch nicht beendet. Es werden noch eine ganze Reihe seiner Ideen Gemeingut der Mathematiker und der mathematisch arbeitenden Forscher werden und in den allgemeinen Unterricht übergehen. In dem vorliegenden Buche habe ich versucht, die üblichen Begriffe der Vektoranalysis im Anschluß und auf Grund Graßmannscher Gedanken darzustellen. In den Bezeichnungen bin ich ihm allerdings nicht durchweg gefolgt. Es wäre z. B. ein vergebliches Bemühen, das Wort „Vektor“ wieder los werden zu wollen, wenn man auch zugeben möchte, daß „Strecke“ besser ist. Was die Bezeichnungen des scalaren und des vektoriellen Produktes betrifft, so habe ich die in der mathematischen Enzyklopädie üblichen nicht gewählt, sondern die von Gibbs eingeführten vorgezogen. Denn die runde und die eckige Klammer, die in der mathematischen Enzyklopädie zur Bezeichnung dieser Operationen verwendet werden, kann man in ihrer eigentlichen Bedeutung als Klammern zur Anwendung des distributiven Gesetzes nicht entbehren. Durch die zweite Bedeutung der Klammern werden die Formeln ungeschickt und unübersichtlich. Bei der Be-

handlung der Tensoren habe ich manches von Gibbs übernommen. Denn Graßmanns Bezeichnungen sind hier zu umständlich.

Der vorliegende erste Band enthält die Vektoranalysis von drei Dimensionen. Im zweiten Bande soll die von vier und mehr Dimensionen behandelt werden, die durch die Anwendung auf die Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt. Hier tritt der Begriff des Tensors in den Vordergrund. Er gehört zu denen, auf die sich Graßmanns prophetische Worte am Schlusse der Vorrede zur Ausdehnungslehre von 1862 beziehen: „Ich weiß, daß einst diese Ideen, wenn auch in veränderter Form, neu erstehen und mit der Zeitentwicklung in lebendige Wechselwirkung treten werden.“

Göttingen, im Mai 1919.

INHALT

*

Kapitel I.

Vectoren und Plangrößen.

Seite

Kapitel II.

Differenziation und Integration.

Kapitel III.

Tensoren.

Seite

* * *

Kapitel I.

Vektoren und Plangrössen.

§ 1. Begriff des Vektors.

Es seien im Raume zwei Punkte A und A′ gegeben. Von beiden Punkten gehen wir in derselben Richtung vorwärts und gelangen, nachdem wir dieselbe geradlinige Entfernung zurückgelegt haben, von A aus nach B und von A′ aus nach B′. Wir wollen dann sagen, derselbe „Vektor“ führe von A nach B, wie von A′ nach B′ oder auch der Vektor, der von A nach B führt, sei gleich dem Vektor, der von A′ nach B′ führt. Ein Vektor ist also ein Ding, das eine Richtung und eine Länge besitzt und dadurch vollständig charakterisiert ist. Zwei Vektoren sind ungleich, wenn sie ungleiche Richtung oder wenn sie ungleiche Länge oder wenn sie sowohl ungleiche Richtung wie ungleiche Länge haben. Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie sowohl dieselbe Richtung wie dieselbe Länge haben.

Wir wollen einen Vektor mit einem beliebigen kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen, z. B. $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{x}$ im Gegensatz zu positiven oder negativen Zahlenwerten, die wir mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben, und zu Punkten, die wir mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnen, und wollen durch das in der Algebra übliche Gleichheitszeichen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

ausdrücken, dass die beiden Vektoren sich nicht voneinander unterscheiden.

Alle Grössen, denen eine Richtung zukommt, wie z. B. eine Geschwindigkeit, ein Stoss, eine Kraft, eine Beschleunigung und viele andere Grössen, die uns bei der Betrachtung der Erscheinungen entgegentreten, können durch Vektoren geometrisch dargestellt werden, sobald wir nur festgesetzt haben, welche Länge der Masseinheit der betreffenden Grösse zukommen soll. Dann wird die gerichtete Grösse von n Masseinheiten durch einen Vektor der gleichen Richtung und einer Länge von n Längeneinheiten geometrisch dargestellt.

§ 2. Die Addition von Vektoren.

Aus zwei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wollen wir einen dritten Vektor $\mathfrak{c}$ auf folgende Weise ableiten. Von einem beliebigen Punkte A führe der Vektor $\mathfrak{a}$ zu einem Punkte B und von B führe der Vektor $\mathfrak{b}$ zu einem Punkte C; dann soll $\mathfrak{c}$ der Vektor sein, der von A nach C führt (Fig. 1). Diese Zusammenfügung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, deren Ergebnis $\mathfrak{c}$ ist, wollen wir durch das Pluszeichen + ausdrücken

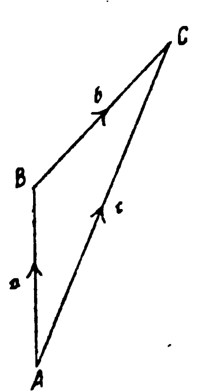


Fig. 1.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

und sagen, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien zueinander addiert.

Dass wir dasselbe Zeichen und dasselbe Wort wählen, das in der Algebra eine andere Bedeutung hat, rechtfertigt sich, wie wir sehen werden, dadurch, dass die Gesetze, die für diese Zusammenfügung von Vektoren gelten, mit den Gesetzen, die für die Addition von Zahlen gelten, durchaus übereinstimmen. Wenn wir dasselbe Zeichen gebrauchen, so entlasten wir damit unser Gedächtnis, während wir eine Verwechselung nicht zu befürchten brauchen, so lange wir nur die Bezeichnung der Vektoren (durch deutsche Buchstaben) von der Bezeichnung der Zahlen (durch kleine lateinische Buchstaben) unterscheiden.

Dass der Vektor $\mathfrak{c}$ durch die Zusammenfügung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf die beschriebene Weise entsteht, drücken wir also durch die Gleichung aus



(1) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

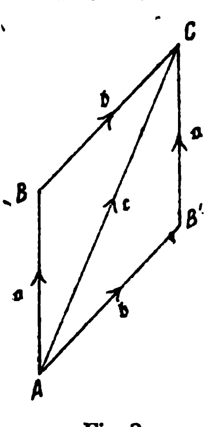


Fig. 2.

Wenn man vom Punkte A aus zuerst den Vektor $\mathfrak{b}$ anträgt, der von A nach B' führt (Fig. 2), dann führt der Vektor $\mathfrak{a}$ von B' aus nach demselben Punkte C, den wir vorher über B erreichten, so dass sich als Resultat der Zusammenfügung auch in diesem Fall derselbe Vektor $\mathfrak{c}$ wie vorhin ergibt. Wir drücken diese Tatsache durch die Gleichung aus:

(2) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}.$$

D. h. geradeso wie bei der Addition zweier Zahlen die beiden Summanden vertauscht werden können, ohne dass die Summe sich ändert, so können wir auch die beiden Vektoren vertauschen, ohne dass das Resultat ihrer Zusammenfügung sich ändert.

Haben die beiden zusammenzufügenden Vektoren die gleiche Länge und entgegengesetzte Richtung, so fällt bei der Zusammenfügung der Punkt C auf den Punkt A und der Vektor $\mathfrak{c}$ verschwindet. Wir bezeichnen das gerade wie bei der Summe zweier entgegengesetzter Zahlen durch die Gleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 0,$$

oder auch

$$\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}.$$

Wir nennen dann die beiden Vektoren einander entgegengesetzt.

Es seien im Raume vier beliebige Punkte ABCD gegeben und es sei $\mathfrak{a}$ der Vektor, der von A bis B, $\mathfrak{b}$ der Vektor, der von B bis C, $\mathfrak{c}$ der Vektor, der von C bis D führt (Fig. 3). Wir fügen nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ zusammen und zu diesem Vektor fügen wir $\mathfrak{c}$; dann ergibt sich der Vektor $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$, der von A nach D führt. Fügen wir andrerseits die beiden Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zusammen zu dem Vektor $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, der von B nach D führt und fügen diesen zu $\mathfrak{a}$ hinzu, so erhalten wir den Vektor $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$, der auch von A nach D führt. D. h. es ist

(3) $$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),$$

oder mit andern Worten, es kommt bei der Zusammenfügung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

nicht auf die Klammern an. Da man nun in der Zusammenfügung zweier Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ die beiden Vektoren vertauschen kann, so ergibt sich, dass in

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

jeder Vektor mit seinem Nachbar vertauscht werden kann, ohne das Gesamtresultat zu ändern, dass mithin jedes der drei Glieder an jeden der drei Plätze gebracht werden kann, mit andern Worten, dass gerade wie bei der Summe dreier Zahlen die Reihenfolge das Resultat nicht beeinflusst. Nach den 6 Stellungen der drei Glieder erhalten wir 6 gebrochene Linien, die von A nach D führen, deren 3 Seiten aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in irgendeiner Reihenfolge bestehen.

Fig. 3.

Hat man nun n Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$, die nach der Reihe von A_0 über $A_1, A_2 \ldots$ bis A_n führen, so entsteht durch Zusammenfügen

von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dazu $\mathfrak{a}_3$, dazu $\mathfrak{a}_4, \ldots$ bis endlich $\mathfrak{a}_n$ ein Vektor, der von A_0 bis A_n führt. Derselbe Vektor entsteht aber auch, wenn ich bei dieser Operation einige der aufeinanderfolgenden Vektoren zusammenfasse, z. B. $\mathfrak{a}_i$ bis $\mathfrak{a}_{i+k}$ zu dem Vektor, der von A_{i-1} bis A_{i+k} führt. In der Reihe der Punkte würden somit die Punkte A_i bis A_{i+k-1} übersprungen werden. Dass beide Male derselbe Vektor sich ergibt, drücken wir durch die Gleichung aus

$$(4)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_i + \cdots + \mathfrak{a}_{i+k} + \cdots + \mathfrak{a}_n = \\ &= \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{i-1} + (\mathfrak{a}_i + \cdots + \mathfrak{a}_{i+k}) + \mathfrak{a}_{i+k+1} + \mathfrak{a}_n. \end{aligned}$$

Mit andern Worten, der resultierende Vektor $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ ändert sich nicht, wenn man irgendwelche aufeinanderfolgende Glieder einklammert. Daraus folgt sogleich, dass der resultierende Vektor sich auch nicht ändert, wenn man irgendeines der Glieder, z. B. $\mathfrak{a}_i$ mit seinem Nachbarn $\mathfrak{a}_{i+1}$ vertauscht. Denn klammert man $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1}$ ein, so kann man in der Klammer $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_{i+1}$ vertauschen und darauf die Klammer wieder weglassen. Geometrisch läuft dies darauf hinaus, dass man in der Reihenfolge der Punkte $A_0 A_1 \ldots A_n$ den Punkt A_i durch einen andern A_i' ersetzt, der von A_{i-1} aus durch den Vektor $\mathfrak{a}_{i+1}$ erreicht wird, so dass der Vektor $\mathfrak{a}_i$ andrerseits von A_i' bis A_{i+1} führt. Durch fortgesetzte Vertauschung zweier benachbarter Glieder in dem Ausdruck

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$$

kann man nun jedes Glied an jede beliebige Stelle bringen, so dass das Resultat gerade so wie eine Summe von beliebig vielen Zahlen von der Reihenfolge der Glieder ganz unabhängig ist.

§ 3. Vektorgleichungen.

Lässt man in der Reihenfolge der Punkte $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ den letzten Punkt A_n mit dem ersten A_0 zusammenfallen, so verschwindet der resultierende Vektor. Wir drücken das durch die Gleichung aus

$$(1)\quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \cdots + \mathfrak{a}_n = 0.$$

Eine Gleichung von der Form

$$(2)\quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_s$$

bedeutet, dass der Vektor, der aus der Zusammenfügung der Vektoren $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r$ entsteht, gleich ist dem Vektor, der aus der Zusammen-

fügung von $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_s$ entsteht, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass sich beide auf Null zusammenziehen. Wir nennen solche Gleichungen „Vektorgleichungen". Jedes Glied kann mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite gebracht werden. Denn da man auf jeder Seite der Gleichung den gleichen Vektor hinzufügen kann, ohne dass die Gleichung aufhört richtig zu sein, so braucht man nur auf beiden Seiten, z. B. den Vektor $-\mathfrak{b}_1$ hinzuzufügen. Auf der rechten Seite kann man dann $\mathfrak{b}_1$ und $-\mathfrak{b}_1$ nebeneinander bringen und zusammenklammern; dann geben sie Null und können gemeinsam weggelassen werden. Das Ergebnis ist somit, dass $\mathfrak{b}_1$ auf der rechten Seite verschwindet und mit entgegengesetztem Vorzeichen auf der linken Seite wieder auftritt. $-\mathfrak{b}_1$ ist dabei der Kürze wegen statt $+(-\mathfrak{b}_1)$ geschrieben und bedeutet, dass der Vektor $-\mathfrak{b}_1$ hinzugefügt werden soll.

Wenn von den Vektoren, die in einer Vektorgleichung vorkommen, alle ausser einem bekannt sind, so findet man diesen, indem man alle übrigen auf die andere Seite der Gleichung bringt, z. B. folgt aus

(3) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bekannt, $\mathfrak{x}$ unbekannt sein soll, indem man $\mathfrak{a}$ auf die andere Seite bringt

(4) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}.$$

§ 4. Beispiele der Addition von Vektoren.

Die Zusammenfügung von Vektoren spielt bei der Betrachtung aller gerichteten Grössen eine grundsätzliche Rolle. Verschiebt sich z. B. ein Körper parallel zu sich selbst mit einer Geschwindigkeit, die durch den Vektor $\mathfrak{a}$ dargestellt werde, und verschiebt sich ebenso ein zweiter Körper relativ zu dem ersten mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$, so ist die absolute Geschwindigkeit des zweiten Körpers gleich $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Wenn also seine absolute Geschwindigkeit mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet wird, so ist seine relative Geschwindigkeit gleich $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$. Ein Schiff, das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ fährt und von einem Wind mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ angeblasen wird, erfährt einen relativen Wind $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$. Der Wimpel am Mast oder der Rauch aus dem Schornstein zeigen den relativen Wind an (Fig. 4).

Zwei Kräfte, die an einem Punkte angreifen, setzen sich nach dem sogenannten Parallelogramm der Kräfte zusammen, d. h. ihre Wirkung kann durch eine einzige Kraft (die „Resultante") ersetzt werden, deren Richtung und Grösse durch eine Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten die beiden Kräfte bilden. Stellen die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die beiden Kräfte dar, so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ihre Resultante. Greifen mehr als zwei Kräfte an demselben Punkte an, so kann man sie auf diese Weise nacheinander zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, die allein dieselbe Wirkung hat wie die einzelnen Kräfte zusammengenommen. Sind diese durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$ dargestellt, so ist die Gesamtkraft durch

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$$

dargestellt. In dem Fall, wo die Kräfte im Gleichgewicht sind, muss die Gesamtkraft verschwinden, so dass

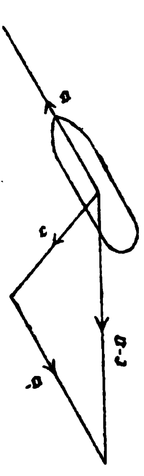


Fig. 4.

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n = 0 \text{ ist.} \tag{1}$$

Geometrisch ausgedrückt heisst das also, wie wir oben sahen, dass die Einzelkräfte hintereinander abgetragen ein geschlossenes Polygon liefern müssen.

Ein Strassenbahnwagen setze sich mit einer konstanten Beschleunigung in Bewegung, so dass der Geschwindigkeitszuwachs, den er in jeder Sekunde erfährt, durch den Vektor $\mathfrak{a}$ dargestellt ist. Ein während dieser gleichmässig beschleunigten Bewegung in dem Wagen frei fallender Körper erfährt dann zwar relativ zur Erde dieselbe Beschleunigung wie jeder andere frei fallende Körper — der Vektor $\mathfrak{g}$ stelle den Geschwindigkeitszuwachs dar, den er infolge der Schwerkraft in der Sekunde erfährt —; relativ zum Wagen aber erfährt er die Beschleunigung $\mathfrak{g}-\mathfrak{a}$. Ein Körper, der im Wagen aus der Ruhelage (relativ zum Wagen) frei herabfällt, bewegt sich relativ zum Wagen in der Richtung des Vektors $\mathfrak{g}-\mathfrak{a}$. Dies ist für einen Insassen des Wagens

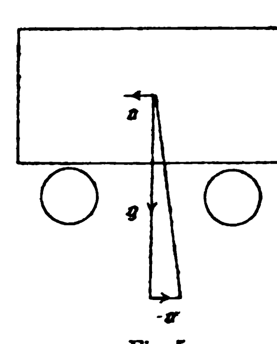


Fig. 5.

die scheinbare Schwerkraft. Ein im Wagen ruhig hängendes Pendel zeigt die Richtung der scheinbaren Schwerkraft an und eine im Wagen zum Einspielen gebrachte Libelle zeigt den zu dieser scheinbaren Schwerkraft senkrechten scheinbaren Horizont an. Nach diesem scheinbaren Horizont und dieser scheinbaren Schwerkraft hat ein im Wagen sich bewegender Mensch sich zu richten. Ist z. B. der Boden des Wagens dem wahren Horizont parallel, so wird der Mensch die Empfindung haben, als wäre der Boden nicht horizontal, sondern vorn höher (Fig. 5).

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie bei all diesen gerichteten Grössen die Zusammensetzung der Vektoren eine wichtige Rolle spielt, um uns die Erscheinungen verstehen zu lassen.

§ 5. Vervielfältigung eines Vektors.

Zwei Vektoren von gleicher oder entgegengesetzter Richtung können durch eine positive oder negative Zahl miteinander verglichen werden, die das Verhältnis ihrer Längen angibt. Ist der Vektor $\mathfrak{b}$ n-mal so lang wie der Vektor $\mathfrak{a}$, aber von gleicher Richtung, so werden wir das durch die Gleichung

(1) $$\mathfrak{b} = n\mathfrak{a}$$

ausdrücken, hat $\mathfrak{b}$ die entgegengesetzte Richtung, so werden wir schreiben

(2) $$\mathfrak{b} = -n\mathfrak{a}.$$

Die Berechtigung dieser Schreibweise leuchtet ein, wenn wir uns unter n eine ganze Zahl denken. Denn der Vektor $3\mathfrak{a}$ z. B. ist dann dasselbe, was wir nach der obigen Bezeichnung auch in der Form

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$$

schreiben könnten. Ebenso wenn n gleich dem reziproken Wert einer ganzen Zahl ist. Denn $\frac{1}{3}\mathfrak{a}$ z. B. ist ein Vektor, der 3 mal zu sich selbst gefügt, $\mathfrak{a}$ gibt. Dann sieht man aber auch, was unter $n\mathfrak{a}$ verstanden werden muss, wenn n eine gebrochene Zahl ist. So ist $\frac{4}{3}\mathfrak{a}$ z. B. ein Vektor, der durch viermaliges Aneinanderlegen des Vektors $\frac{1}{3}\mathfrak{a}$ entsteht, oder auch der, 3 mal mit sich selbst zusammengefügt, $4\mathfrak{a}$ gibt.

Die Bezeichnung

$$\mathfrak{b} = -n\mathfrak{a},$$

wenn $\mathfrak{b}$ die entgegengesetzte Richtung hat wie $\mathfrak{a}$, rechtfertigt sich dadurch, dass der Vektor $-\mathfrak{a}$ dieselbe Richtung hat wie $\mathfrak{b}$, dass also $-n\mathfrak{a}$ nur statt $n(-\mathfrak{a})$ geschrieben ist. Wir wollen für $n\mathfrak{a}$ und $-n\mathfrak{a}$ sagen, es sei der Vektor $\mathfrak{a}$ mit der positiven Zahl n oder der negativen Zahl $-n$ multipliziert.

Werden zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide mit derselben positiven oder negativen Zahl a multipliziert und zusammengefügt

$$a\mathfrak{a}_1 + a\mathfrak{a}_2,$$

so ergibt sich derselbe Vektor, wie wenn man erst $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zusammenfügt und den resultierenden Vektor $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ mit a multipliziert. Wir drücken das durch die Gleichung aus

(3) $$a\mathfrak{a}_1 + a\mathfrak{a}_2 = a(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)$$

Fig. 6 zeigt den Fall eines positiven Wertes von a, Fig. 7 den eines negativen. In beiden Fällen sind die beiden Dreiecke ABC

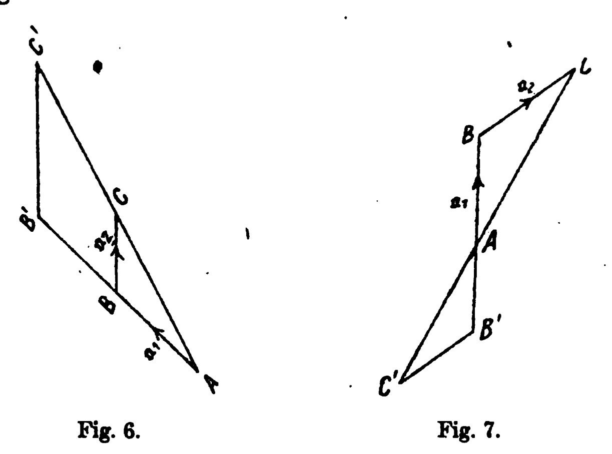


Fig. 6. Fig. 7.

und AB'C' einander ähnlich. Im ersten Fall sind sie auch ähnlich gelegen, im zweiten Fall sind die Richtungen des einen Dreiecks den entsprechenden Richtungen im andern entgegengesetzt. Die absolute Grösse von a gibt das Verhältnis der entsprechenden Längen an.

Die Regel, dass man die Klammer auf der rechten Seite der Gleichung auflösen kann, ist formell genau dieselbe, die in der Buchstabenrechnung gilt. Sie lässt sich auch auf beliebig viele Glieder übertragen. Denn wenn die Richtigkeit der Formel

(4) $$a\mathfrak{a}_1 + a\mathfrak{a}_2 + \cdots + a\mathfrak{a}_{n-1} = a(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n-1})$$

für n—1 Vektoren angenommen wird, so folgt sie sofort für n Vektoren. Man setze nämlich $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{c}$, so ist zunächst für die beiden Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$

$$a\mathfrak{c} + a\mathfrak{a}_n = a(\mathfrak{c} + \mathfrak{a}_n).$$

Jetzt setze man für $\mathfrak{c}$ seinen Wert ein, so ergibt sich unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung

(5) $$a\mathfrak{a}_1 + a\mathfrak{a}_2 + \cdots + a\mathfrak{a}_n = a(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n).$$

Geometrisch kann die Gleichung so gedeutet werden. Von einem Punkte A_0 tragen wir die Vektoren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ hintereinander ab und erhalten auf diese Weise eine gebrochene Linie $A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$ mit $n + 1$ irgendwie im Raume liegenden Punkten, von denen auch einige im besonderen Fall aufeinander fallen können. Der Vektor, der von A_0 zu A_n führt, ist dann $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$. Die Multiplikation mit einem positiven Wert a bedeutet geometrisch, dass wir die ganze Figur im a-fachen Maßstab konstruieren. Alle Vektoren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ gehen dabei in $a\mathfrak{a}_1, a\mathfrak{a}_2, \cdots a\mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ in $a(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdots + \mathfrak{a}_n)$ über und zugleich bleibt der Umstand bestehen, dass der letzte Vektor aus der Zusammenfügung der andern hervorgeht. Bei negativem a wird zugleich mit der maßstäblichen Änderung allen Vektoren die entgegengesetzte Richtung erteilt.

§ 6. Numerische Ableitung eines Vektors aus anderen.

Jeder Vektor $\mathfrak{p}$, der dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie ein anderer Vektor $\mathfrak{a}$, kann aus diesem durch Multiplikation mit einer positiven oder negativen Zahl abgeleitet werden

(1) $$\mathfrak{p} = x\mathfrak{a}.$$

Sind zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ weder gleich noch entgegengesetzt gerichtet und leitet man durch zwei beliebige positive Zahlen x_1 und x_2 einen neuen Vektor $\mathfrak{p}$ aus ihnen ab durch die Gleichung

(2) $$\mathfrak{p} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2,$$

so liegen die drei Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ parallel derselben Ebene. Denn nach dem Obigen bilden die drei Vektoren $-\mathfrak{p}$, $x_1\mathfrak{a}_1$, $x_2\mathfrak{a}_2$, wenn man sie aneinander abträgt ein geschlossenes Dreieck. Jeder Vektor $\mathfrak{q}$, der derselben Ebene parallel ist, lässt sich durch passende Wahl von x_1 und x_2 in der Form

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2$$

darstellen. Denn trägt man $\mathfrak{q}$ von irgendeinem Punkt O ab bis Q und zieht durch O und Q Parallelen zu $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ (Fig. 8), so bilden die Parallelen ein Parallelogramm OQ_1QQ_2. Die Vektoren von O nach Q_1 und von Q_1 nach Q sind, da sie den Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ parallel sind, in der Form $x_1\mathfrak{a}_1$ und $x_2\mathfrak{a}_2$ darstellbar, wo die Zahlen x_1 und x_2 ihre Längenverhältnisse zu $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ messen (negativ zu rechnen, wenn ihre Richtung der von $\mathfrak{a}_1$ resp. $\mathfrak{a}_2$ entgegengesetzt ist). Da sie zusammengesetzt den Vektor $\mathfrak{q}$ ergeben, so ist also

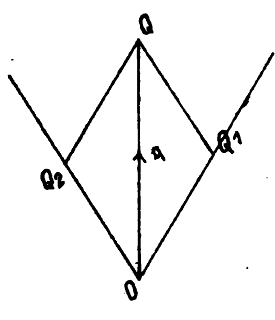


Fig. 8.

(3) $$\mathfrak{q} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2.$$

Wir sagen dann, $\mathfrak{q}$ ist aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ numerisch abgeleitet. Wir können also sagen: alle Vektoren, die aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ durch irgendwelche positiven oder negativen Zahlen numerisch abgeleitet werden (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass eine der beiden Zahlen Null ist), sind einer und derselben Ebene parallel und umgekehrt, jeder Vektor, der dieser Ebene parallel ist, kann aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ numerisch abgeleitet werden.

Sind drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ so beschaffen, dass keiner von ihnen aus den andern beiden numerisch abgeleitet werden kann, so ist jeder beliebige Vektor $\mathfrak{p}$ in der Form

(4) $$\mathfrak{p} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3$$

darstellbar, wo x_1, x_2, x_3 positive oder negative Zahlen sind. Um das zu zeigen, denken wir uns den Vektor $\mathfrak{p}$ von irgendeinem Punkt O aus abgetragen. Er führe von O nach P. Durch O legen wir eine Ebene parallel zu den Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Liegt der Vektor $\mathfrak{p}$ in dieser Ebene, so ist er schon aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ableitbar und x_3 ist gleich Null zu setzen. Liegt er nicht in dieser Ebene, so liegt der Punkt P ausserhalb. Wir ziehen durch P eine Parallele zu $\mathfrak{a}_3$. Sie muss die Ebene schneiden, denn sonst wäre auch $\mathfrak{a}_3$ zu ihr parallel, was der Voraussetzung widerstreitet, dass $\mathfrak{a}_3$ nicht aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ numerisch ableitbar sein soll. Sei P_1 der Schnittpunkt, so muss der Vektor OP_1 aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, der Vektor P_1P aus

$\mathfrak{a}_3$ numerisch ableitbar sein, d. h. sie sind in der Form $x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2$ und $x_3\mathfrak{a}_3$ darstellbar und durch ihre Zusammenfügung erhält man

$$\mathfrak{p} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 .$$

Wir können also sagen, aus irgend drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, die nicht auseinander numerisch ableitbar sind, lässt sich jeder beliebige Vektor numerisch ableiten. Denkt man sich die drei Vektoren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ von einem Punkte O aus abgetragen, so mögen sie von O nach $A_1 A_2 A_3$ führen. Der Vektor $\mathfrak{p}$ werde ebenfalls von O aus abgetragen und führe von O bis P. Wir nennen die Graden OA_1, OA_2, OA_3 Koordinatenachsen und die Ebenen OA_2A_3, OA_3A_1, OA_1A_2 Koordinatenebenen. Legen wir durch P drei Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen, so schneiden sie die Koordinatenachsen in drei Punkten $P_1 P_2 P_3$ und begrenzen mit den Koordinatenebenen ein Parallelepipedon, dessen eine Diagonale OP ist. Die Vektoren $x_1\mathfrak{a}_1$, $x_2\mathfrak{a}_2$, $x_3\mathfrak{a}_3$ führen von O aus nach P_1, P_2, P_3, und bilden also drei aneinander stossende Kanten des Parallelepipedons. Die Zahlen x_α drücken das Verhältnis der Längen dieser drei Kanten zu OA_1, OA_2, OA_3 aus und geben zugleich durch ihr Vorzeichen an, ob OP_α die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung hat wie OA_α (Fig. 9). Wir nennen OA_1, OA_2, OA_3 die Einheitsstrecken und das von ihnen bestimmte Parallelepipedon den Einheitsraum und die drei durch OA_2, OA_3, durch OA_3, OA_1 und durch OA_1, OA_2 bestimmten Parallelogramme die Einheitsflächen. Die Zahlen x_1, x_2, x_3 nennt man auch wohl die Koordinaten des Punktes P in dem Koordinatensystem OA_1, OA_2, OA_3. Wir nennen sie die „Mass-Zahlen" des Vektors $\mathfrak{p}$ in bezug auf die Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$.

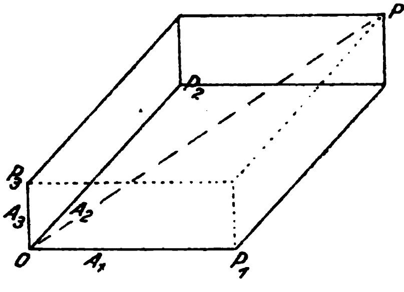


Fig. 9.

Zwischen vier beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ muss mindestens eine Gleichung von der Form

$$(5) \qquad x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 + x_4\mathfrak{a}_4 = 0$$

bestehen. Denn besteht zwischen dreien von ihnen, z. B. zwischen

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ allein keine solche Gleichung, so dass also x_4 nicht Null sein kann, so lässt sich nach dem obigen der Vektor $-x_4\mathfrak{a}_4$, wo x_4 eine beliebige positive oder negative Zahl sein kann, aus $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ numerisch ableiten, d. h. es ist

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 = -x_4\mathfrak{a}_4$$

oder

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3 + x_4\mathfrak{a}_4 = 0.$$

§ 7. Das äussere Produkt zweier Vektoren.

Es seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei beliebige Vektoren. Wir denken uns $\mathfrak{p}$ von einem Punkte A aus abgetragen bis B. Von B aus denken wir uns den Vektor $\mathfrak{q}$ abgetragen bis C. Nun verschieben wir den Vektor $\mathfrak{p}$ parallel mit sich, so dass sein Endpunkt auf der Strecke BC entlang gleitet bis C. Er beschreibt dadurch ein Parallelogramm ABCD (Fig. 10), auf dessen Rande durch die Richtung der beiden Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein bestimmter Umlaufsinn ABCDA angegeben ist. Diese, aus den beiden Vektoren erzeugte, mit einem bestimmten Umlaufsinn behaftete ebene Fläche nennen wir „das äussere Produkt" der beiden Vektoren. Wenn wir die Rollen der beiden Vektoren vertauschen, erst den Vektor $\mathfrak{q}$ abtragen von A bis D, dann den Vektor $\mathfrak{p}$ von D bis C und nun den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{q}$ längs der Strecke DC von D bis C verschieben, so erzeugen wir damit die Fläche ADCBA, die zwar denselben Inhalt aber den entgegengesetzten Umlaufsinn hat wie die vorhin erzeugte Fläche. Wir wollen diese beiden Dinge unterscheiden, weil der Umlaufsinn, wie sich zeigen wird, eine wichtige Rolle spielt. Auch der Flächeninhalt der erzeugten Figur ist von Bedeutung; dagegen kommt es uns nicht auf die Form der Begrenzung an. Irgendein ebenes Flächenstück, dessen Ebene den Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ parallel ist, dessen Flächeninhalt und Umlaufsinn gleich dem des Parallelogramms ABCDA ist, setzen wir ihm gleich und sagen, es sei gleich dem „äusseren Produkt von $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}$", wofür wir das Zeichen

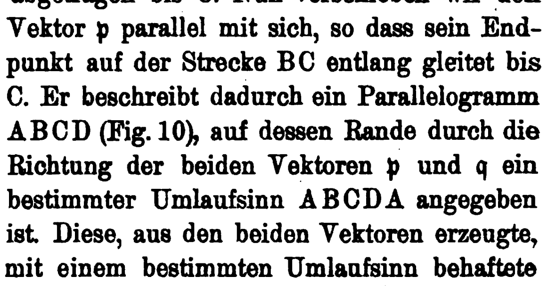


Fig. 10.

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$$

einführen wollen. Ist dagegen der Umlaufsinn der entgegengesetzte,

so sagen wir, es sei gleich dem äusseren Produkt von $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}$ und bezeichnen es mit

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}.$$

Wir wollen ein ebenes Flächenstück von bestimmtem Flächeninhalt und Umlaufsinn eine „Plangrösse" nennen. Zwei Plangrössen heissen also dann und nur dann einander gleich, wenn ihre Ebenen zusammenfallen oder parallel sind, wenn ihre Flächeninhalte übereinstimmen und ihr Umlaufsinn der gleiche ist. Plangrössen bezeichnen wir durch grosse deutsche Buchstaben.

$\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$ stellen entgegengesetzte Plangrössen dar, die zwar gleichen Flächeninhalt aber entgegengesetzten Umlaufsinn haben. Zu jeder gegebenen Plangrösse kann ein ihm flächengleiches Parallelogramm von gleichem Umlaufsinn gefunden werden, so dass die Plangrösse gleich dem äusseren Produkt der beiden Vektoren wird, die zwei aufeinander folgende Seiten des Parallelogramms bilden. Dabei kann man irgendeinen, z. B. den ersten der beiden Vektoren, so lange er nur der Plangrösse parallel ist, beliebig annehmen. Damit ist dann eine Seite des Parallelogramms festgelegt. Die gegenüberliegende Seite muss dann in einem solchen Abstande liegen, dass der Flächeninhalt gleich dem gegebenen wird; in ihrer eigenen Geraden kann sie dagegen verschoben werden, ohne dass sich der Flächeninhalt ändert. Durch den vorgeschriebenen Umlaufsinn ist die Lage der Geraden nicht mehr zweideutig, was sie ohne den Umlaufsinn sein würde.

§ 8. Die Addition von Plangrössen.

Der Grund, weshalb man die aus den beiden Vektoren $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, entspringende Plangrösse ein **Produkt** der beiden Vektoren nennt, liegt darin, dass es gewissen Gesetzen gehorcht, die zu den Gesetzen der Multiplikation zweier Zahlen eine weitreichende Analogie zeigen. Allerdings sind die Gesetze nicht dieselben. Das sahen wir schon darin, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nicht vertauscht werden können. $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$ betrachten wir nicht als einander gleich, sondern als einander entgegengesetzt und setzen ihre Summe gleich Null.

(1) $$\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = -\mathfrak{q}\,\mathfrak{p};\quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\,\mathfrak{p} = 0.$$

Dagegen sind andere Analogien vorhanden. Bilden wir das äussere

Produkt einer Summe zweier „Vektoren" $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ mit einem Vektor $\mathfrak{p}$, der mit ihnen in derselben Ebene liegt, so erkennt man sofort (Fig. 11) die Richtigkeit der Gleichung

(2) $$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}\ ^{1)}.$$

Denn die linke Seite der Gleichung bedeutet das Parallelogramm $ACC'A'$, das durch Verschiebung der Strecke AC um den Vektor $\mathfrak{p}$ überstrichen wird mit dem Umlaufsinn $ACC'A'$. Auf der rechten Seite bedeutet das erste Glied das Parallelogramm $ABB'A'$, das bei der Verschiebung der Strecke AB um den Vektor $\mathfrak{p}$ überstrichen wird, das zweite Glied das Parallelogramm $BCC'B'$, das bei der Verschiebung von BC um den Vektor $\mathfrak{p}$ überstrichen wird. In der Tat ist nun der Flächeninhalt des Parallelogramm $ACC'A'$ gleich der Summe der Flächeninhalte von $ABB'A'$ und $BCC'B'$. Man braucht nur die Strecke BB' parallel mit sich selbst in ihrer Geraden so zu verschieben, dass B in die Gerade AC fällt (nach $\overline{B}$ Fig. 11), wobei sich die beiden äusseren Produkte der rechten Seite nicht verändern, so wird B' auf $C'A'$ fallen (nach $\overline{B}'$, Fig. 11) und das Parallelogramm $ACC'A'$ wird in zwei Teile von gleichem Umlaufsinn zerfallen, von denen der eine gleich $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$, der andere gleich $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ ist. Es kann auch der Fall eintreten, dass die Gerade BB' die Gerade AC in ihrer Verlängerung schneidet (Fig. 12, Fig. 13). Dann sind die beiden äusseren Produkte $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ von entgegengesetztem Vorzeichen. Das Parallelogramm $ACC'A'$ hat dann denselben Umlaufsinn wie das grössere der beiden Parallelogramme $ABB'A'$ und $BCC'B'$. Durch Verschiebung von BB' in seiner Geraden gehen diese über in $A\overline{B}\overline{B}'A'$ und $\overline{B}CC'\overline{B}'$. Man kann jetzt das grössere dieser beiden, z. B. in Fig. 12 das Parallelogramm $A\overline{B}\overline{B}'A'$, in zwei Teile zerlegen, von denen der eine den gleichen

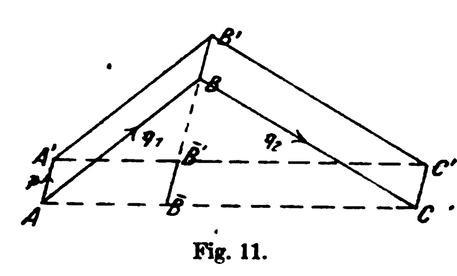


Fig. 11.

1) Man beachte, dass Fig. 11, 12, 13, 14 hier zunächst nicht als Projektionen räumlicher Figuren angesehen werden dürfen, sondern als ebene Figuren.

Flächeninhalt aber den entgegengesetzten Umlaufsinn hat wie $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$, so dass dieser Teil aufgehoben wird. Der übrigbleibende Teil ist dann identisch mit $ACC'A'$.

In Fig. 13 ist $\overline{B}CC'\overline{B}'$ das grössere Parallelogramm. Es zerfällt in die beiden Teile $\overline{B}AA'\overline{B}'$ und $ACC'A'$, von denen der erste von $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$ aufgehoben wird.

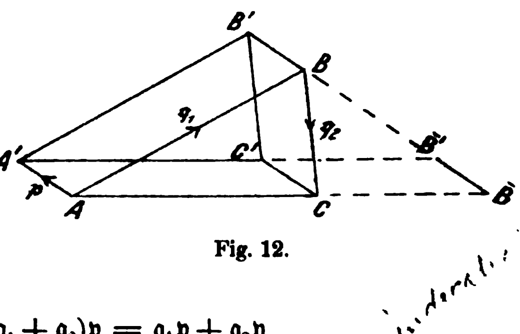


Fig. 12.

Alle diese Fälle sind in der Formel

$$(3) \qquad (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$$

inbegriffen, wenn nur dem Umlauf ein bestimmtes Vorzeichen zugeordnet wird. Welcher Umlaufsinn das positive Vorzeichen erhält, ist dabei willkürlich. Die Formel entspricht dem Gesetz, nach dem bei der Rechnung mit Zahlgrössen Klammern aufgelöst werden

$$(4) \qquad (a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b .$$

Wenn wir also die Zusammensetzung von Vektoren der Addition von Zahlen analog gesetzt haben, so werden wir die neue Operation der Multiplikation vergleichen, wenn schon die Analogie keine vollständige ist.

Zwei gleich oder entgegengesetzt gerichtete Vektoren geben als äusseres Produkt Null. Die Seiten des Parallelogramms rücken dabei in eine Gerade, so dass der Flächeninhalt verschwindet. Die Formel

$$(5) \qquad (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$$

bleibt aber auch für diese Fälle richtig. Ist z. B. $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ parallel $\mathfrak{p}$, so dass $ACC'A'$ verschwindet, so wird BB' parallel der Geraden $AA'CC'$ und die beiden Parallelogramme $ABB'A'$ und $BCC'B'$ sind von gleichem Flächeninhalt und entgegengesetztem Umlauf-

Fig. 13.

sinn, so dass sich $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ gegeneinander wegheben. Ist $\mathfrak{q}_2$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet wie $\mathfrak{p}$, so verschwindet $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ und es ist

(6) $$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$$

oder in Worten, man kann das Parallelogramm ACC′A′ (Fig. 14) in ABB′A′ verwandeln, ohne Inhalt und Umlaufsinn zu ändern, indem man die Strecke CC′ in ihrer eigenen Geraden verschiebt.

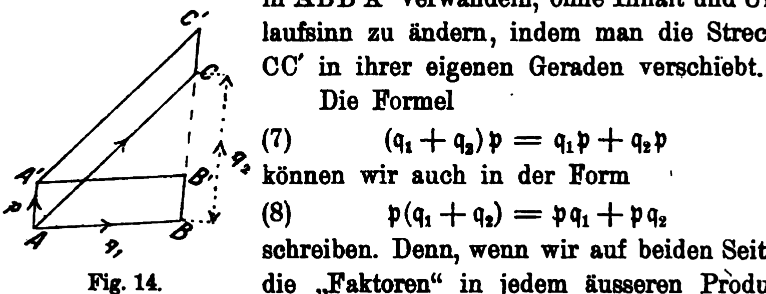


Fig. 14.

Die Formel

(7) $$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$$

können wir auch in der Form

(8) $$\mathfrak{p}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2$$

schreiben. Denn, wenn wir auf beiden Seiten die „Faktoren" in jedem äusseren Produkt vertauschen, so kommt das auf dasselbe hinaus, als hätten wir auf beiden Seiten mit — 1 multipliziert, was die Richtigkeit der Gleichung nicht ändert.

Sollen irgend zwei einander parallele Plangrössen addiert werden, d. h. soll eine Plangrösse gefunden werden, deren Umlaufsinn gleich der grösseren der beiden gegebenen Plangrössen und dessen Inhalt gleich der Summe oder Differenz der beiden gegebenen Inhalte ist, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Umlaufsinn haben, so kann das so ausgeführt werden, dass man die beiden gegebenen Plangrössen in der Form zweier äusseren Produkte

$$\mathfrak{q}_1\mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$$

darstellt, bei denen ein Faktor, z. B. der zweite, derselbe ist. Dann ist

$$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p}$$

gleich der gesuchten Plangrösse.

Zwei Plangrössen, die nicht derselben Ebene parallel sind, fügen wir nach der folgenden Regel zu einer dritten Plangrösse zusammen. Irgend zwei Ebenen, die den beiden Plangrössen parallel sind, müssen sich schneiden, da die beiden Flächenteile als einander nicht parallel vorausgesetzt sind. Sei $\mathfrak{p}$ ein der Schnittlinie paralleler Vektor, so können wir, wie oben gezeigt worden ist, die beiden Flächenteile auf die Formen

$$\mathfrak{q}_1\mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$$

bringen. Wir bilden dann die Summe $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ und nennen die Plangrösse, die gleich

$$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p}$$

ist, die Summe der beiden gegebenen Plangrössen. Die Formel also

$$(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p},$$

die wir oben für die Addition paralleler Plangrössen beweisen mussten, weil für diese die Addition schon einen Sinn hatte, benutzen wir hier zur Definition dessen, was wir unter Summe und Addieren von Plangrössen verstehen wollen. Die Rechtfertigung des Namens ergibt sich wieder wie bei der Addition von Vektoren durch die der Zahlenaddition entsprechenden Gesetze, denen die Operation gehorcht[1].

Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei Plangrössen, so ist

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1. \tag{9}$$

Denn wir können für $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ setzen und haben

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_2\mathfrak{p} &= (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)\mathfrak{p} \\ \mathfrak{q}_2\mathfrak{p} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{p} &= (\mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_1)\mathfrak{p} \end{aligned} \tag{10}$$

Da aber $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_1$, so sind die rechten Seiten einander gleich.

§ 9. Die Ergänzung einer Plangrösse.

Sei $\mathfrak{F}$ eine beliebige Plangrösse, so wollen wir ihr einen bestimmten Vektor $\mathfrak{f}$ zuordnen, der die folgende Beziehung zu $\mathfrak{F}$ haben soll. Erstens soll $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{F}$ senkrecht stehen. Dann sind für $\mathfrak{f}$ zwei Richtungen möglich, unter denen wir eine Wahl zu treffen haben. Zu dem Ende denken wir uns eine gerade Linie, die $\mathfrak{F}$ in irgendeinem seiner Punkte senkrecht durchsticht. Laufen wir nun um den Rand des Flächenteils in dem gegebenen Sinne herum, so umkreisen wir die Gerade. Es wird somit ein gewisser Drehungssinn um die Gerade festgesetzt. Der Vektor $\mathfrak{f}$ soll nun die Richtung haben, in der sich eine Rechtsschraube, deren Achse in die Gerade fällt, bei der festgesetzten Drehung verschiebt. Um endlich

[1]) Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p}$ und den zugehörigen Flächen wird jetzt dargestellt durch die Figuren 11, 12, 13, wenn man sie als räumliche Figuren ansieht.

auch die Länge von $\mathfrak{f}$ eindeutig zu bestimmen, so wählen wir eine bestimmte Länge als Längeneinheit, in der wir alle Längen messen wollen und setzen fest, dass alle Flächen in der Flächeneinheit gemessen werden sollen, die gleich dem Quadrat ist, das die Längeneinheit zur Seite hat. Die Länge des Vektors $\mathfrak{f}$ soll dann so bestimmt sein, dass ihre Masszahl gleich der Masszahl ist, durch welche die Fläche von $\mathfrak{F}$ in der gewählten Flächeneinheit gemessen wird. Damit ist $\mathfrak{f}$ eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{F}$ gegeben ist, und auch umgekehrt ist $\mathfrak{F}$ eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{f}$ gegeben ist. Denn aus $\mathfrak{f}$ folgt eine Ebene, die auf $\mathfrak{f}$ senkrecht steht, und ein bestimmter Umlaufsinn in dieser Ebene, der der Drehung einer Rechtsschraube entspricht, wenn sie sich in der Richtung von $\mathfrak{f}$ vorwärtsschiebt, und endlich ergibt sich aus der Masszahl, welche die Länge von $\mathfrak{f}$ misst, die Masszahl, welche die Fläche von $\mathfrak{F}$ misst und damit die Grösse von $\mathfrak{F}$. Es ist indessen wohl zu beachten, dass die Beziehung zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ nur durch die Festhaltung der Längen- und Flächeneinheit eindeutig gehalten wird. Wählt man die Längeneinheit z. B. doppelt so gross und damit die Flächeneinheit viermal so gross, so wird die Masszahl von $\mathfrak{F}$ $^1/_4$ so gross wie vorher. Der zugehörige Vektor wird daher halb so lang wie vorher, da die neue Längeneinheit doppelt so gross, die neue Masszahl aber $^1/_4$ so gross ist wie im ersten Fall.

Wir nennen den Vektor $\mathfrak{f}$ „die Ergänzung von $\mathfrak{F}$" und ebenso nennen wir die Plangrösse $\mathfrak{F}$ „die Ergänzung von $\mathfrak{f}$" und drücken diese Beziehung durch einen senkrechten Strich vor $\mathfrak{f}$ oder vor $\mathfrak{F}$ aus:

(1) $$\mathfrak{f} = |\mathfrak{F} \text{ und } \mathfrak{F} = |\mathfrak{f}.$$

Haben wir zwei Plangrössen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die derselben Ebene parallel sind, so sind auch die Ergänzungen $\mathfrak{f}_1 = |\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{f}_2 = |\mathfrak{F}_2$ derselben Geraden parallel und es ist offenbar $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ die Ergänzung von $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$. Dasselbe bleibt aber auch richtig, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht derselben Ebene parallel sind. Denken wir uns nämlich $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in zwei Ebenen liegend, die sich in einer Geraden schneiden, so können wir in dieser Geraden einen beliebigen Vektor $\mathfrak{p}$ annehmen und, wie oben gezeigt, zwei Vektoren $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ senkrecht zu $\mathfrak{p}$ bestimmen, derart, dass $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2$. Die Länge von $\mathfrak{p}$ können wir dabei gleich der festgesetzten Längeneinheit

heit machen, so dass die Masszahlen der Längen von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ gleich den Masszahlen der Flächen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind. Dann gehen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ aus $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ hervor durch Drehung der ganzen Figur um die Schnittgerade um 90°. Der Drehungssinn ist dabei der einer Rechtsschraube, die sich in der Richtung von $\mathfrak{p}$ vorwärtsschiebt. In Fig. 15 ist der Vektor $\mathfrak{p}$ auf der Ebene der Zeichnung senkrecht nach dem Beschauer hin gerichtet zu denken. Man erkennt somit, dass der Vektor $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ bei dieser Drehung aus dem Vektor $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ hervorgeht. Folglich ist $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ auf der Fläche $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{p}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)$ senkrecht, die Masszahl von $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ ist gleich der Masszahl von $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ und somit gleich der von $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ und die Richtung von $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ ist die für die Ergänzung $|(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)$ festgesetzte. Mithin ist $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ die Ergänzung von $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ oder wie wir schreiben können:

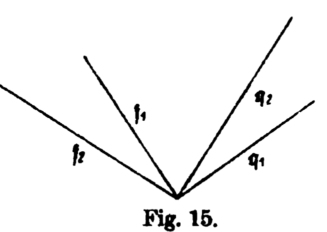


Fig. 15.

(2) $$|(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) = |\mathfrak{F}_1 + |\mathfrak{F}_2,$$

und umgekehrt ist $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = |(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2)$ oder, wie wir auch schreiben können

(3) $$|(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2) = |\mathfrak{f}_1 + |\mathfrak{f}_2.$$

Mit andern Worten anstatt zwei Plangrössen zu addieren, kann man auch die beiden Vektoren addieren, die ihre Ergänzungen sind und von dem so erhaltenen Vektor die Ergänzung nehmen. Daraus folgt, dass die Gesetze über die Addition von Vektoren auf die Addition von Plangrössen übertragen werden können. Sind z. B. $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ drei beliebige Vektoren, so ist (§ 2, Gl. 3)

(4) $$(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2) + \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3).$$

Da links und rechts derselbe Vektor steht, so folgt, dass auch die Ergänzung der linken Seite gleich der Ergänzung der rechten Seite ist:

(5) $$|[(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2) + \mathfrak{f}_3] = |[\mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3)].$$

Die Ergänzung der Summe zweier Vektoren ist aber, wie eben gezeigt, gleich der Summe der Ergänzungen der Summanden also:

(6) $$|(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2) + |\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_1 + |(\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3).$$

Ferner ist nach Gl. 3

$$|(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2) = |\mathfrak{f}_1 + |\mathfrak{f}_2 \text{ und } |(\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3) = |\mathfrak{f}_2 + |\mathfrak{f}_3$$

Bezeichnen wir daher die drei Ergänzungen $|\mathfrak{f}_1$, $|\mathfrak{f}_2$, $|\mathfrak{f}_3$ mit $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, so geht (6) über in

(7) $$(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 + (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3).$$

Diese Regel (7) entspricht also genau der Regel (4) der Zusammenfügung der Vektoren, ebenso wie die Regel $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1$ (§ 8, Gl. 9) der Regel $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_1$. Aus diesen beiden Regeln folgt genau so wie in der Algebra die allgemeine Regel, dass in einer Summe von beliebig vielen Summanden das Resultat von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist.

Entsprechend der oben (§ 3, Gl. 2) betrachteten Vektorgleichungen von der Form

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_s$$

erhalten wir Gleichungen zwischen den Plangrössen, die ihre Ergänzungen bilden

(8) $$|\mathfrak{a}_1 + |\mathfrak{a}_2 + \cdots + |\mathfrak{a}_r = |\mathfrak{b}_1 + |\mathfrak{b}_2 + \cdots + |\mathfrak{b}_s$$

und umgekehrt von jeder Gleichung zwischen Plangrössen können wir zu der entsprechenden Vektorgleichung übergehen, die zwischen ihren Ergänzungen bestehen muss. Es gilt daher auch die Regel, die oben für die Vektoren nachgewiesen wurde, dass man in einer solchen Gleichung einen Term mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringen kann. Ferner gilt dasselbe, was oben über die Multiplikation von Vektoren mit positiven oder negativen Zahlen ausgeführt worden ist, in entsprechender Weise für Plangrössen.

§ 10. Die numerische Ableitung einer Plangrösse aus anderen.

Zwei Plangrössen, die derselben Ebene parallel sind und den gleichen oder entgegengesetzten Umlaufsinn besitzen, können durch eine positive bzw. negative Zahl miteinander verglichen werden, die das Verhältnis ihrer Flächeninhalte angibt. Ist die Plangrösse $\mathfrak{B}$ n-mal so gross wie die Plangrösse $\mathfrak{A}$ und von gleichem Umlaufsinn, so werden wir dies durch die Gleichung

(1) $$\mathfrak{B} = n\mathfrak{A}$$

ausdrücken, ist sie von entgegengesetztem Umlaufsinn, so schreiben wir:

$$\mathfrak{B} = -n\mathfrak{A}.$$

Diese Gleichungen sind äquivalent mit den Vektorgleichungen $|\mathfrak{B} = n\,|\,\mathfrak{A}$ bzw. $|\mathfrak{B} = -n\,|\,\mathfrak{A}$, die aus ihnen und aus denen sie folgen. Es ist nur daran zu denken, dass die Ergänzung von $n\mathfrak{a}$ gleich dem n-fachen der Ergänzung von $\mathfrak{a}$ sein muss. Ebenso folgt aus der Gleichung (§ 5, Gl. 4)

$$\mathrm{a}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n) = \mathrm{a}\mathfrak{a}_1 + \mathrm{a}\mathfrak{a}_2 + \cdots \mathrm{a}\mathfrak{a}_n,$$

indem man zu den Ergänzungen übergeht

(2) $$|\,\mathrm{a}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n) = |\,\mathrm{a}\mathfrak{a}_1 + |\,\mathrm{a}\mathfrak{a}_2 + \cdots + |\,\mathrm{a}\mathfrak{a}_n$$

und daraus

$$\mathrm{a}\,|\,(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n) = \mathrm{a}\,|\,\mathfrak{a}_1 + \mathrm{a}\,|\,\mathfrak{a}_2 + \cdots \mathrm{a}\,|\,\mathfrak{a}_n$$

oder

(3) $$\mathrm{a}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n) = \mathrm{a}\mathfrak{A}_1 + \mathrm{a}\mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathrm{a}\mathfrak{A}_n.$$

Jede Plangrösse $\mathfrak{P}$, die derselben Ebene parallel ist wie die Plangrösse $\mathfrak{A}$, kann aus dieser durch Multiplikation mit einer positiven oder negativen Zahl abgeleitet werden.

(4) $$\mathfrak{P} = x\mathfrak{A}.$$

Sind zwei Plangrössen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht einer Ebene parallel und leitet man aus ihnen durch zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 eine neue Plangrösse $\mathfrak{P}$ ab durch die Gleichung

(5) $$\mathfrak{P} = x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2,$$

so gibt es eine Gerade, die allen drei Plangrössen parallel ist. Denn die Schnittlinie zweier Ebenen, denen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ parallel sind, muss auch $\mathfrak{P}$ parallel sein. Man kann die beiden Plangrössen $x_1\mathfrak{A}_1$ und $x_2\mathfrak{A}_2$ durch Rechtecke darstellen, die eine Seite gemein haben.

$$x_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \text{ und } x_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2.$$

Dann ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2),$$

d. h. $\mathfrak{P}$ ist durch ein Rechteck mit den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ darstellbar. Die drei Rechtecke können als drei Seitenflächen eines Prismas angeordnet werden, dessen brechende Kanten dem gemeinsamen Vektor $\mathfrak{a}$ parallel sind. Die drei Ergänzungen von $x_1\mathfrak{A}_1$, $x_2\mathfrak{A}_2$ und $-\mathfrak{P}$ genügen dann der Gleichung

$$-|\,\mathfrak{P} + |\,x_1\mathfrak{A}_1 + |\,x_2\mathfrak{A}_2 = 0$$

und müssen daher hintereinander abgetragen ein geschlossenes Dreieck bilden.

Jede Plangrösse $\mathfrak{Q}$, die dem gemeinsamen Vektor von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ parallel ist, lässt sich durch passende Wahl von x_1 und x_2 in der Form

$$\mathfrak{Q} = x_1 \mathfrak{A}_1 + x_2 \mathfrak{A}_2 \tag{6}$$

darstellen. Denn ihre Ergänzung steht auf dem gemeinsamen Vektor senkrecht, ist daher einer Ebene parallel, der die beiden Ergänzungen von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ parallel sind und muss infolgedessen, wie oben gezeigt wurde, in der Form

$$x_1 \,|\, \mathfrak{A}_1 + x_2 \,|\, \mathfrak{A}_2$$

darstellbar sein. Folglich ist die Plangrösse selbst

$$\mathfrak{Q} = x_1 \mathfrak{A}_1 + x_2 \mathfrak{A}_2.$$

Wir sagen dann $\mathfrak{Q}$ ist aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ numerisch abgeleitet. Es gilt mithin der Satz: Alle Plangrössen, die aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ durch irgendwelche positiven oder negativen Zahlen numerisch abgeleitet werden (wobei nicht ausgeschlossen wird, dass eine der beiden Zahlen Null ist), sind derselben Geraden parallel, und umgekehrt jede Plangrösse, die dieser Geraden parallel ist, kann aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ numerisch abgeleitet werden.

Sind drei Plangrössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ so beschaffen, dass keine von ihnen aus den anderen beiden numerisch abgeleitet werden kann, so ist jede beliebige Plangrösse $\mathfrak{P}$ in der Form

$$\mathfrak{P} = x_1 \mathfrak{A}_1 + x_2 \mathfrak{A}_2 + x_3 \mathfrak{A}_3 \tag{7}$$

darstellbar, wo x_1, x_2, x_3 positive oder negative Zahlen sind (die Null nicht ausgeschlossen). Um das zu zeigen, braucht man wieder nur die Ergänzungen der vier Plangrössen zu betrachten. Die Ergänzungen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ müssen voneinander unabhängig sein in dem Sinne, dass keine aus den anderen beiden numerisch abgeleitet werden kann. Denn wäre das möglich, so würde dasselbe für die Plangrössen gelten, was wider die Voraussetzung ist. Sind aber die Ergänzungen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ voneinander unabhängig, so lässt sich, wie oben gezeigt ist, jeder Vektor aus ihnen numerisch ableiten, also auch die Ergänzung von $\mathfrak{P}$. D. h. es lassen sich die Zahlen x_1, x_2, x_3 so finden, dass

$$|\mathfrak{P} = x_1|\mathfrak{A}_1 + x_2|\mathfrak{A}_2 + x_3|\mathfrak{A}_3.$$

Das ist aber gleichwertig mit

$$\mathfrak{P} = x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + x_3\mathfrak{A}_3.$$

Zwischen vier beliebigen Plangrössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ muss mindestens eine Gleichung von der Form

(8) $$x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + x_3\mathfrak{A}_3 + x_4\mathfrak{A}_4 = 0$$

bestehen. Denn besteht zwischen dreien von ihnen, z. B. zwischen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ allein, keine solche Gleichung, so dass also x_4 nicht Null sein kann, so lässt sich nach dem vorhergehenden die Plangrösse $-x_4\mathfrak{A}_4$, wo für x_4 eine beliebige positive oder negative Zahl gesetzt werden möge, aus $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ numerisch ableiten, d. h. es ist

$$x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + x_3\mathfrak{A}_3 = -x_4\mathfrak{A}_4$$

oder

$$x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + x_3\mathfrak{A}_3 + x_4\mathfrak{A}_4 = 0.$$

Von einem Punkte O im Raume denken wir uns nach drei beliebigen Punkten A, B, C drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gezogen, die nicht einer Ebene parallel sein sollen. Die drei Plangrössen, die durch die äusseren Produkte $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ entstehen, wollen wir mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Diese drei sind voneinander unabhängig; denn die Schnittlinie von zweien ist der dritten nicht parallel. Es lassen sich daher alle Plangrössen in der Form

$$x_1\mathfrak{b}\mathfrak{c} + x_2\mathfrak{c}\mathfrak{a} + x_3\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

oder

$$x_1\mathfrak{A} + x_2\mathfrak{B} + x_3\mathfrak{C}$$

darstellen, analog wie sich alle Vektoren in der Form

$$x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + x_3\mathfrak{c}$$

darstellen lassen, wo x_1, x_2, x_3 irgendwelche positive oder negative Zahlen sind, die wir die Masszahlen der betreffenden Grösse nennen.

§ 11. Das äussere Produkt einer Plangrösse und eines Vektors.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Plangrösse und $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Vektor, so verstehen wir unter dem äusseren Produkt von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{c}$ den Rauminhalt, der beschrieben wird, wenn man $\mathfrak{A}$ sich um den Vektor $\mathfrak{c}$ verschieben lässt. Dabei soll aber unterschieden werden, nach welcher Seite von $\mathfrak{A}$ der Vektor $\mathfrak{c}$ gerichtet ist. Wir nennen die eine

Seite von $\mathfrak{A}$ positiv, die andere negativ nach der Massgabe, dass der Vektor | $\mathfrak{A}$ die Richtung von der negativen zur positiven Seite besitzen soll. Dem entsprechend bezeichnen wir den Rauminhalt, der durch die Verschiebung von $\mathfrak{A}$ längs des Vektors $\mathfrak{c}$ beschrieben wird als positiv oder negativ, je nachdem sich $\mathfrak{A}$ dabei nach seiner positiven Seite hinbewegt oder nach seiner negativen. Wir bezeichnen dieses äussere Produkt durch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c}$$

oder wenn $\mathfrak{A}$ selbst als äusseres Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ dargestellt ist, durch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

und nennen dies das äussere Produkt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{c}$.

Wir wollen uns die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von einem Punkt O aus abgetragen denken, so dass ihre Endpunkte in A, B, C liegen. Dann bilden sie drei aneinander stossende Kanten des Parallelepipedons, dessen Rauminhalt mit dem verabredeten Vorzeichen durch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

dargestellt ist.

Liegt C auf der positiven Seite von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so liegt auch A auf der positiven Seite von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und B auf der positiven Seite von $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ (Fig. 16). Und umgekehrt, liegt C auf der negativen Seite von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so liegt auch A auf der negativen Seite von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und B auf der negativen Seite von $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$. Wir erhalten mithin dasselbe Parallelepipedon mit demselben Vorzeichen, wenn wir statt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ die Vektoren in der Reihenfolge $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ annehmen, d. h. wenn wir die Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ längs $\mathfrak{a}$ oder die Plangrösse $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ längs $\mathfrak{b}$ verschieben.

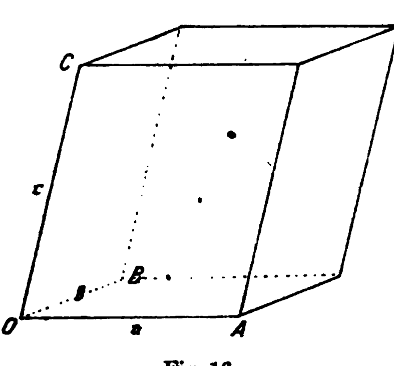


Fig. 16.

(1) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Dagegen stellen

(2) $$\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

dasselbe Parallelepipedon mit dem entgegengesetzten Zeichen dar. Mit anderen Worten, der Wert von

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

ändert sich nicht, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zyklisch vertauscht werden, geht aber ins Entgegengesetzte über, wenn zwei von den Vektoren ihre Plätze wechseln.

Ist der Vektor $\mathfrak{c}$ der Plangrösse $\mathfrak{A}$ parallel, so wird das äussere Produkt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c}$$

gleich Null; denn $\mathfrak{A}$ wird dann in seiner eigenen Ebene verschoben und beschreibt somit keinen Rauminhalt. Tritt anstelle von $\mathfrak{c}$ die Summe von zwei Vektoren $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2$, so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c} = \mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{c}_2. \tag{3}$$

Zum Beweise stelle man sich zuerst den besonderen Fall vor, wo $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ entweder gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sind, wobei es keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}$ als gleichgerichtet anzunehmen, da wir $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ miteinander vertauschen können. Wir denken uns nun die Plangrösse $\mathfrak{A}$ zuerst um $\mathfrak{c}_1$ verschoben, so dass das Parallelepipedon $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1$ beschrieben wird, und von der Endlage aus verschieben wir es abermals um $\mathfrak{c}_2$. Dadurch fügen wir im ersten Fall, wo $\mathfrak{c}_2$ dieselbe Richtung hat wie $\mathfrak{c}_1$, das Parallelepipedon $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2$ hinzu und beide zusammen stellen $\mathfrak{A}\mathfrak{c}$ dar. Im zweiten Fall, wo $\mathfrak{c}_2$ die entgegengesetzte Richtung hat, schieben wir dadurch die Plangrösse wieder zurück. Bei ihrer ersten Verschiebung beschreibt sie das Parallelepipedon $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1$, bei ihrer zweiten Verschiebung das Parallelepipedon $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2$, das aber jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt und zu $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1$ algebraisch hinzugefügt, das Parallelepipedon $\mathfrak{A}\mathfrak{c}$ ergibt. In beiden Fällen haben wir daher

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c} = \mathfrak{A}\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{c}_2.$$

Seien nun $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ irgendwie gerichtet, so denken wir uns wieder eine Anfangslage von $\mathfrak{A}$, eine zweite Lage, die durch die Verschiebung um $\mathfrak{c}_1$ aus der ersten entsteht und eine dritte Lage, die aus der zweiten durch eine Verschiebung um $\mathfrak{c}_2$ entsteht, während der Vektor $\mathfrak{c}$ die Plangrösse aus der ersten in die dritte Lage führt. Denken wir uns nun die zweite Lage der Plangrösse dadurch ver-

ändert, dass wir sie in ihrer eigenen Ebene parallel mit sich verschieben. Dadurch ändern wir die Vektoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, während $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2$ ungeändert bleibt. Der Rauminhalt und das Vorzeichen der Parallelepipede $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2$ bleiben dabei gleichfalls ungeändert, weil die beiden Endflächen bei beiden in denselben Ebenen bleiben. Jetzt können wir die zweite Lage so annehmen, dass drei einander entsprechende Punkte der ersten, zweiten und dritten Lage in einer Geraden liegen, d. h. dass $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Dann ist nach dem vorigen

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{c}_2$$

und da sich, bei der Änderung der zweiten Lage Rauminhalt und Vorzeichen der Parallelepipede nicht geändert hat, so gilt dieselbe Gleichung für beliebige Vektoren $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$. Für $\mathfrak{A}$ setzen wir wieder das äussere Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein und erhalten somit

(4) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}_2.$$

Da wir nun, wie oben gezeigt, jeden der drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in dem Produkte

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

an die dritte Stelle bringen können, so folgt, dass wir auch für $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ in ähnlicher Weise wie für $\mathfrak{c}$ eine Summe zweier Vektoren in das Produkt einführen können.

Z. B. $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Mithin

(5) $$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

und analog

(6) $$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}.$$

§ 12. Zusammenhang mit der Determinantentheorie.

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei Vektoren, deren äusseres Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ von Null verschieden ist, die also voneinander unabhängig sind, d. h., dass keiner von ihnen aus den anderen beiden numerisch abgeleitet werden kann, so kann jeder andere Vektor $\mathfrak{p}$, wie wir schon oben (§ 6) sahen, aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet werden, so dass

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}.$$

Die Masszahlen x, y, z können als Verhältnisse von äusseren Produkten je dreier Vektoren dargestellt werden. Bildet man nämlich das äussere Produkt $\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und ersetzt $\mathfrak{p}$ durch seinen Ausdruck, so ergibt sich

$$\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = x\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

weil $\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ verschwinden. Mithin ist

$$x = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.$$

Analog findet man

$$y = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \text{ und } z = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.$$

Diese Bemerkungen hängen auf das Engste mit der Auflösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten zusammen. Sollen nämlich drei Unbekannte x, y, z berechnet werden, die den drei linearen Gleichungen genügen

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= p_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= p_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= p_3, \end{aligned}$$

so kann man anstatt der drei Zahlengleichungen auch eine einzige Vektorgleichung schreiben. Sind nämlich $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ drei beliebige voneinander unabhängige Vektoren, so kann man die erste Gleichung mit $\mathfrak{e}_1$, die zweite mit $\mathfrak{e}_2$, die dritte mit $\mathfrak{e}_3$ multiplizieren und alle drei addieren. Die Vektorgleichung, die sich daraus ergibt

$$(2)\qquad x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c} = \mathfrak{p},$$

wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + a_3\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{b} &= b_1\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{e}_2 + b_3\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{c} &= c_1\mathfrak{e}_1 + c_2\mathfrak{e}_2 + c_3\mathfrak{e}_3 \\ \mathfrak{p} &= p_1\mathfrak{e}_1 + p_2\mathfrak{e}_2 + p_3\mathfrak{e}_3, \end{aligned}$$

ersetzt die drei Gleichungen vollständig. Denn da $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ numerisch voneinander unabhängig sind, so kann eine Vektorgleichung zwischen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ nur dadurch bestehen, dass sich alle Glieder in $\mathfrak{e}_1$ für sich wegheben und ebenso alle Glieder in $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$.

Das äussere Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ kann man nach den entwickelten Regeln ausmultiplizieren und findet

$$(4)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = d\,\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3.$$

Die Zahl d heisst „die Determinante der drei linearen Gleichungen".

Sie ist aus den neun Grössen

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

gebildet und besteht aus sechs Produkten entsprechend den sechs Gliedern, die beim Ausmultiplizieren von

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$$

allein übrig bleiben. Jedes dieser Glieder muss nämlich ein Produkt aus je einem Term der drei Klammern sein und, wenn es nicht verschwinden soll, so müssen die drei Terme, aus deren Produkt das Glied besteht, alle drei Vektoren e_1, e_2, e_3 enthalten. Wenn also z. B. aus der ersten Klammer der Term $a_2 e_2$ genommen wird, so wird aus der zweiten Klammer nur der Term $b_3 e_3$ oder $b_1 e_1$ hinzutreten können, weil $b_2 e_2$ mit $a_2 e_2$ multipliziert Null gibt. Wenn zu $a_2 e_2$ der ersten Klammer aus der zweiten Klammer $b_3 e_3$ hinzugenommen wird, so muss aus der dritten Klammer $c_1 e_1$ hinzutreten, weil $a_2 b_3 e_2 e_3$ mit $c_2 e_2$ und mit $c_3 e_3$ multipliziert Null gibt. So entsteht das Glied

$$a_2 b_3 c_1 e_2 e_3 e_1.$$

Die sechs beim Ausmultiplizieren nicht verschwindenden Glieder müssen also alle sechs die Gestalt haben

$$a_\lambda b_\mu c_\nu e_\lambda e_\mu e_\nu,$$

wo λ, μ, ν eine der sechs Umstellungen der drei Zahlen 1, 2, 3 sind. Nun ist

$$e_\lambda e_\mu e_\nu = \pm e_1 e_2 e_3,$$

das + Zeichen gilt dabei, wenn die Umstellung $\lambda \mu \nu$ aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge 1 2 3 hervorgeht, also für

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2,

das — Zeichen dagegen für

1 3 2, 3 2 1, 2 1 3,

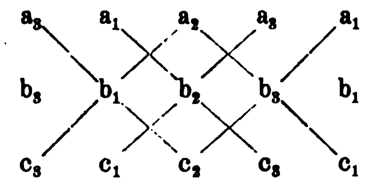
d. h. es ist die Determinante d der neun Grössen

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

gleich

(5) $a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3$.

Um die sechs Produkte rasch und sicher mit dem richtigen Vorzeichen ausrechnen zu können, kann man sich des folgenden Kunstgriffs bedienen. Man fügt zu den drei Kolonnen der neun Zahlen rechts die Kolonne mit dem Index 1, links die mit dem Index 3 hinzu. Die drei mit positivem Zeichen zu rechnenden Produkte liegen dann in drei schrägen, von links oben nach rechts unten verlaufenden Linien, die drei mit negativem Zeichen zu rechnenden Produkte dagegen in drei schrägen, von links unten nach rechts-oben verlaufenden Linien.



Wenn die Determinante d von Null verschieden ist, so sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ voneinander unabhängig. Dann sind die Unbekannten x, y, z, wie wir oben sahen, eindeutig bestimmt und durch die Quotienten der äusseren Produkte dargestellt

$$(6) \qquad x = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \quad y = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \quad z = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.$$

Die drei im Zähler stehenden äusseren Produkte werden gerade wie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ausgerechnet, es tritt nur an Stelle einer der Horizontalreihen die Reihe p_1, p_2, p_3 der Masszahlen des Vektors $\mathfrak{p}$. Da sich $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$ aus Zähler und Nenner weghebt, so werden x, y, z gleich den Quotienten der entsprechenden Determinanten. Wenn dagegen die Determinante d verschwindet, so sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ voneinander abhängig, d. h. sie sind einer Ebene parallel. Wäre nun der Vektor $\mathfrak{p}$ dieser Ebene nicht parallel, so wäre es unmöglich, die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z = \mathfrak{p}$$

zu befriedigen, denn die linke Seite kann nur einen Vektor darstellen, der auch der Ebene parallel ist. Die drei linearen Gleichungen hätten dann keine Lösung. Um zu erkennen, ob dieser Fall vorliegt, bildet man eine der Plangrössen, z. B. $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Wenn $\mathfrak{b}$

und $\mathfrak{c}$ nicht selbst voneinander numerisch abhängen, so ist $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ nicht Null. Ist nun $\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ von Null verschieden, so folgt, dass $\mathfrak{p}$ der Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ nicht parallel ist und dass mithin die Vektorgleichung keine Lösung hat. Die Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ nimmt, wenn man für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ihre Ausdrücke in $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ einsetzt und ausmultipliziert, die Form an

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (b_2 c_3 - b_3 c_2)\,\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\,\mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\,\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2,$$

so dass

$$(7) \qquad \alpha_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad \alpha_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3, \quad \alpha_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

die drei Masszahlen der Plangrösse sind, die sie aus den Plangrössen $\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$ numerisch ableiten. Das äussere Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ lässt sich dann auch schreiben

$$(8) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)\,\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3,$$

so dass

$$d = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$$

und

$$\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3)\,\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3.$$

Zeigt sich dagegen durch das Verschwinden von $\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, dass auch $\mathfrak{p}$ der Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ parallel ist, so ist die Vektorgleichung

$$x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$$

sogar für einen beliebigen Wert von x lösbar; denn der Vektor $\mathfrak{p} - x\mathfrak{a}$ ist ebenfalls der Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ parallel und lässt sich daher aus $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, die voneinander unabhängig angenommen sind, numerisch ableiten.

Um y für einen beliebigen Wert von x numerisch zu ermitteln, wählen wir einen beliebigen Vektor $\mathfrak{d}$, der aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nicht numerisch abgeleitet werden kann und bilden das äussere Produkt beider Seiten der Gleichung mit $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$

$$(9) \qquad x\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d} + y\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d},$$

somit ergibt sich

$$(10) \qquad y = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}} - x\,\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}},$$

und analog

$$z = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}} - x\,\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}}.$$

Wäre die Plangrösse $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 0$, aber $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ von Null verschieden, so ergeben sich durch eine analoge Rechnung

$$x = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}} - z\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}},$$

$$y = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - z\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}}.$$

Sind die Plangrössen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ beide Null, so sind alle drei Vektoren einer Geraden parallel. Dann ist die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z = \mathfrak{p}$$

nicht zu befriedigen, ausser wenn auch $\mathfrak{p}$ der Geraden parallel ist. Wir erkennen das daran, dass wir $\mathfrak{p}$ mit irgendeinem der drei Vektoren, z. B., $\mathfrak{a}$ multiplizieren. Ist die Plangrösse $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ von Null verschieden, so ist die Vektorgleichung unmöglich. Ist dagegen $\mathfrak{a}\mathfrak{p} = 0$, so ist sie sogar zu erfüllen, selbst wenn man zwei von den drei Unbekannten, z. B. y und z, beliebig annimmt.

Denn alle vier Vektoren sind dann aus einem numerisch ableitbar, z. B. aus $\mathfrak{a}$. Dann ist auch $\mathfrak{p} - y\mathfrak{b} - z\mathfrak{c}$, wenn man beliebige Werte für y und z einsetzt, aus $\mathfrak{a}$ ableitbar und die Masszahl ist x. Um x zu finden, kann man irgendeine der drei gegebenen linearen Gleichungen benutzen, bei der der Koeffizient von x nicht verschwindet, oder wenn man von der Vektorgleichung

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z = \mathfrak{p}$$

wieder ausgehen will, so kann man sich so ausdrücken, dass die Vektorgleichung mit einer der drei Plangrössen $\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_3\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$ zu multiplizieren sei. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$ z. B. erhält man

$$x\,\mathfrak{a}\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 + y\,\mathfrak{b}\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 + z\,\mathfrak{c}\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{p}\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3.$$

Das ist aber nichts anderes als

$$(x a_1 + y b_1 + z c_1)\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 = p_1\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3,$$

was auf die erste der linearen Gleichungen hinausläuft.

§ 13. Das skalare Produkt zweier Vektoren.

Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ versteht man das äussere Produkt des einen Vektors mit der Ergänzung des andern

$$\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b} \text{ oder } \mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{a},$$

d. h. also den positiv oder negativ zu rechnenden Rauminhalt des Parallelepipedons, das durch Parallelverschiebung der Plangrösse

$|\mathfrak{b}$ um den Vektor $\mathfrak{a}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Plangrösse $|\mathfrak{a}$ um den Vektor $\mathfrak{b}$ entsteht. Denken wir uns $\mathfrak{a}$ in zwei Komponenten zerlegt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, von denen $\mathfrak{a}_1$ senkrecht zu $|\mathfrak{b}$. $\mathfrak{a}_2$ parallel zu $|\mathfrak{b}$ sein soll, so haben wir nach dem Obigen

$$\mathfrak{a}|\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)|\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1|\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_2|\mathfrak{b}. .$$

Aber, da $\mathfrak{a}_2$ parallel $|\mathfrak{b}$ ist, so ist

$$\mathfrak{a}_2|\mathfrak{b} = 0$$

und mithin

(1) $$\mathfrak{a}|\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1|\mathfrak{b}.$$

Wir denken uns $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Ebene der Zeichnung (Fig. 17) liegend, so dass $|\mathfrak{b}$ auf der Zeichenebene senkrecht steht. Die Höhe des Parallelepipedons ist durch $\mathfrak{a}_1$ dargestellt und das Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{a}_1$ dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie $\mathfrak{b}$, d. h. je nachdem der Winkel ϑ zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ spitz oder stumpf ist. Sind $\mathfrak{l}_a$ und $\mathfrak{l}_b$ die Masszahlen für die Längen der beiden Vektoren oder, was dasselbe ist, für die Flächeninhalte ihrer Ergänzungen, so ist die Masszahl des Parallelepipedons demnach mit dem richtigen Vorzeichen durch

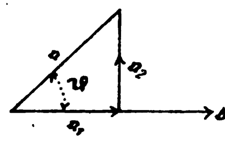


Fig. 17.

$$\mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b \cos \vartheta$$

ausgedrückt, womit zugleich gezeigt ist, dass es auf dasselbe hinauskommt, ob die Ergänzung von $\mathfrak{b}$ um $\mathfrak{a}$ oder die Ergänzug von $\mathfrak{a}$ um $\mathfrak{b}$ verschoben wird.

(2) $$\mathfrak{a}|\mathfrak{b} = \mathfrak{b}|\mathfrak{a} = \mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b \cos \vartheta.$$

Um in der Bezeichnung des skalaren Produkts besser zum Ausdruck zu bringen, dass es direkt mit den beiden Vektoren in Zusammenhang gebracht wird, ohne dass wir den Umweg über die Ergänzung eines der beiden Vektoren zu nehmen brauchen, wollen wir es durch die Bezeichnung

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$$

ausdrücken. Von dem äusseren Produkt ist also das skalare Produkt in der Bezeichnung durch den zwischen den beiden Vektoren eingeschalteten Punkt unterschieden. Wir haben dann also nach dem Vorhergehenden das Gesetz, dass

(3) $$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \mathfrak{b} . \mathfrak{a}.$$

Tritt an Stelle des Vektors $\mathfrak{a}$ eine Summe von zwei Vektoren

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d},$$

so ist nach dem Früheren

$$\mathfrak{a} \,|\, \mathfrak{b} = (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \,|\, \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \,|\, \mathfrak{b} + \mathfrak{d} \,|\, \mathfrak{b},$$

oder in unserer neuen Bezeichnung

$$(4) \qquad (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{b} + \mathfrak{d} \,.\, \mathfrak{b},$$

d. h. es gilt für das skalare Produkt nicht nur das kommutative Gesetz $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{a}$, sondern auch das distributive Gesetz, nach dem die Klammern aufgelöst werden können. Setzt man für $\mathfrak{d}$ wieder die Summe zweier Vektoren

$$\mathfrak{d} + \mathfrak{e}$$

ein, so ergibt sich

$$(5) \qquad (\mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e}) \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{b} + (\mathfrak{d} + \mathfrak{e}) \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{b} + \mathfrak{d} \,.\, \mathfrak{b} + \mathfrak{e} \,.\, \mathfrak{b},$$

und analog für beliebig viele Summanden.

Das skalare Produkt zweier Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen, ist Null, weil dann der eine Vektor der Ergänzung des anderen parallel ist und die Verschiebung der Plangrösse keinen Rauminhalt erzeugt.

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist gleich dem Quadrat der Masszahl, die seine Länge misst.

§ 14. Das vektorielle Produkt zweier Vektoren.

Unter dem vektoriellen Produkt eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit einem zweiten Vektor $\mathfrak{b}$ versteht man denjenigen Vektor $\mathfrak{c}$, der gleich der Ergänzung des äusseren Produktes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist

$$\mathfrak{c} = |\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Er ist also nach der positiven Seite der Plangrösse $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gerichtet, steht auf ihr senkrecht und die Masszahl seiner Länge ist gleich der Masszahl des Flächeninhalts von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, d. h. gleich dem Produkt der Masszahlen der Längen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Um wieder, wie beim skalaren Produkt, besser zum Ausdruck zu bringen, dass der Vektor $\mathfrak{c}$ direkt aus den beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsteht, ohne dass wir den Umweg über die Ergänzung des äusseren Produktes zu nehmen brauchen, wählen wir für das vektorielle Produkt die Bezeichnung

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Das zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stehende schräge Kreuz unterscheidet also das vektorielle von dem äusseren und von dem skalaren Produkt. Bei der Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht der Umlaufsinn des äusseren Produktes und damit die Ergänzung ins Entgegengesetzte über. Somit erhalten wir die Regel

(1) $$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}.$$

Ferner gilt das distributive Gesetz

(2) $$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}.$$

Denn nach dem Früheren ist

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

und $$|(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}) = |\mathfrak{a}\mathfrak{b} + |\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

Ebenso erhalten wir durch Vertauschung der Faktoren

(3) $$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \times \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}.$$

Das äussere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ kann auch als die Ergänzung des vektoriellen Produktes $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ aufgefasst werden

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = |(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}).$$

Mithin ist das äussere Produkt der drei Vektoren $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$

(4) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}|(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}.(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$$

gleich dem skalaren Produkt von $\mathfrak{a}$ mit dem vektoriellen Produkt von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.

Das vektorielle Produkt eines Vektors mit einem ihm gleich oder entgegengesetzt gerichteten ist Null, da das äussere Produkt der beiden Null ist.

§. 15. Das äussere Produkt zweier Plangrössen.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Plangrössen, die wir uns in zwei bestimmten sich schneidenden Ebenen liegend vorstellen wollen. Seien ferner $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Ergänzungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so muss die Schnittlinie der beiden Ebenen auf beiden Ergänzungen senkrecht stehen. Mithin ist der Vektor

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

der Schnittlinie parallel und die Masszahl seiner Länge ist gleich dem Produkt der Masszahlen der Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Sinus des Winkels, den ihre Ebenen miteinander bilden.

Wir nennen diesen Vektor das äussere Produkt der Plangrösse $\mathfrak{A}$ mit der Plangrösse $\mathfrak{B}$. Die Bezeichnung rechtfertigt sich durch die Analogie zu dem äusseren Produkt zweier Vektoren. So wie zwei Vektoren in ihrem äusseren Produkt eine Plangrösse bestimmen, die beiden parallel ist und deren Grösse gleich dem Produkt der beiden Längen in den Sinus des Winkels ist, den sie miteinander bilden, so bestimmen zwei Plangrössen einen Vektor, der beiden parallel ist und dessen Grösse gleich dem Produkt der beiden Inhalte in den Sinus des Winkels ist, den die Plangrössen miteinander bilden. Dieses äussere Produkt von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir analog wie das zweier Vektoren mit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Um auch mit der Richtung des Vektors

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

eine sichere und leicht fassliche Vorstellung zu verbinden, denken wir uns die Plangrösse $\mathfrak{A}$ um die Schnittlinie der beiden Ebenen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gedreht, bis seine Ergänzung mit der von $\mathfrak{B}$ die gleiche Richtung hat. Die Drehung soll nach der Seite geschehen, bei der der Drehungswinkel kleiner als zwei Rechte ist. Dann stimmt die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit der Fortschreitung einer Rechtsschraube überein, deren Achse in der Schnittlinie liegt und die sich in demselben Sinne wie $\mathfrak{A}$ um die Schnittlinie dreht.

Die Richtigkeit dieser Vorstellung folgt unmittelbar aus der Definition

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Denn bei der Drehung von $\mathfrak{A}$ geht die Richtung von $\mathfrak{a}$ auf dem kürzesten Wege in die von $\mathfrak{b}$ über. Die Richtung von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ geht dann nach der positiven Seite der Plangrösse $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Sind die Ebenen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel, so verschwindet mit dem Sinus des Winkels auch ihr äusseres Produkt. Vertauscht man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so geht das äussere Produkt ins Gegengesetzte über

$$(1) \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} = -\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Auch das distributive Gesetz ist erfüllt. Denn wird z. B. für $\mathfrak{B}$ die Summe zweier Plangrössen eingesetzt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2,$$

so ist nach dem früheren die Ergänzung der Summe gleich der

Summe der Ergänzungen. Bezeichnen also $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ die Ergänzungen von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, so ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$$

und mithin

$$(2) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2.$$

Wir wollen uns die beiden Plangrössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Rechtecke dargestellt denken, die eine in der Schnittlinie ihrer beiden Ebenen liegende Seite gemein haben.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{p}\mathfrak{r} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{q}\mathfrak{r}.$$

Dann hat der Vektor $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{r}$, je nachdem $\mathfrak{r}$ die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die Ergänzung von $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$. Denn die oben betrachtete Drehung, durch die $\mathfrak{A}$ in die Ebene von $\mathfrak{B}$ und die Ergänzung von $\mathfrak{A}$ auf dem kürzesten Wege in der Richtung der Ergänzung von $\mathfrak{B}$ übergeführt wird, führt auch $\mathfrak{p}$ in die Richtung von $\mathfrak{q}$ über. Mit anderen Worten, $\mathfrak{r}$ hat dieselbe Richtung wie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ positiv ist und die entgegengesetzte, wenn es negativ ist.

Die Länge von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist gleich dem Produkt der Flächen in den Sinus des Winkels, also gleich dem Produkt der Fläche $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ in das Quadrat der Länge von $\mathfrak{r}$ oder gleich dem absoluten Betrag von $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ in die Länge von $\mathfrak{r}$. Mithin ist

$$(3) \quad (\mathfrak{p}\mathfrak{r})(\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})\mathfrak{r}.$$

Denn die rechte Seite stellt einen Vektor dar, der je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie $\mathfrak{r}$ und seine Länge hat den richtigen Betrag der Länge von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht als Rechtecke sondern als Parallelogramme mit einer gemeinsamen Seite $\mathfrak{r}$ dargestellt, so dass also $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nicht auf $\mathfrak{r}$ senkrecht stehen, so lassen sich $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in der Form

$$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} + \lambda\mathfrak{r}$$
$$\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}} + \mu\mathfrak{r}$$

schreiben, wo $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ auf $\mathfrak{r}$ senkrecht stehen und λ und μ geeignete positive oder negative Zahlen sind. Dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{p}\mathfrak{r} = (\bar{\mathfrak{p}} + \lambda\mathfrak{r})\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{q}\mathfrak{r} = (\bar{\mathfrak{q}} + \mu\mathfrak{r})\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{r}$$

und mithin

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{r})(\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{r})(\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{r}) = (\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{r})\mathfrak{r}.$$

Nun ist aber

$$\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{r} = (\mathfrak{p} - \lambda\mathfrak{r})(\mathfrak{q} - \mu\mathfrak{r})\mathfrak{r} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}.$$

Also auch in diesem Falle wie oben

(4) $$(\mathfrak{p}\mathfrak{r})(\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})\mathfrak{r}$$

oder, wenn man bedenkt, dass die Ergänzungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch in der Form $\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q} \times \mathfrak{r}$ geschrieben werden können.

(5) $$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times (\mathfrak{q} \times \mathfrak{r}) = (\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})\mathfrak{r},$$

wobei $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ drei beliebige Vektoren sein können.

$\mathfrak{q} \times \mathfrak{r}$ stellt bei passender Wahl von $\mathfrak{q}$ einen beliebigen auf $\mathfrak{r}$ senkrechten Vektor dar. Bezeichnen wir ihn mit $\mathfrak{s}$ und bedenken, dass $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ auch in der Form $\mathfrak{p}.(\mathfrak{q} \times \mathfrak{r})$ geschrieben werden kann, so folgt

(6) $$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s} = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{s})\mathfrak{r}.$$

Ist $\mathfrak{s}$ nicht senkrecht auf $\mathfrak{r}$ sondern ein beliebiger Vektor, so können wir ihn aus zwei Teilen zusammensetzen, von denen der erste zu $\mathfrak{r}$, der zweite zu $\mathfrak{p}$ senkrecht ist. Zu dem Ende brauchen wir uns nur Ebenen zu denken, die auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ senkrecht stehen. Wird $\mathfrak{s}$ von einem Punkte der Schnittlinie beider Ebenen aus abgetragen, so ziehe man durch den Endpunkt von $\mathfrak{s}$ eine beliebige Parallele zu der einen Ebene, so dass sie die andere Ebene schneidet. Die eine Komponente läuft dann vom Anfangspunkt von $\mathfrak{s}$ in dieser letzten Ebene bis zum Schnittpunkt mit der Parallelen, die andere wird durch die Parallele selbst gebildet. Setzen wir nun

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2,$$

wobei $\mathfrak{s}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}_2$ senkrecht zu $\mathfrak{p}$ sein soll, so wird

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s} = (\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times (\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2) = (\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s}_1 + (\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s}_2.$$

Nun ist nach obigem

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s}_1 = (\mathfrak{p}.\mathfrak{s}_1)\mathfrak{r}$$
$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s}_2 = -(\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}) \times \mathfrak{s}_2 = -(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}_2)\mathfrak{p}$$

aber

$$\mathfrak{p}.\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{p}.(\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_2) = \mathfrak{p}.\mathfrak{s} - \mathfrak{p}.\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{p}.\mathfrak{s}$$
$$\mathfrak{r}.\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{r}.(\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_1) = \mathfrak{r}.\mathfrak{s} - \mathfrak{r}.\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{r}.\mathfrak{s}$$

Mithin

(7) $$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s} = (\mathfrak{p}.\mathfrak{s})\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}.\mathfrak{s})\mathfrak{p}.$$

Diese Geichung bleibt auch dann noch richtig, wenn entgegen unserer Voraussetzung $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ einander parallel sind. Denn dann

ist nicht nur die linke Seite Null, weil $\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}$ Null ist, sondern auch die rechte, weil $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ auseinander numerisch ableitbar $\mathfrak{p} = a\mathfrak{r}$ und damit die beiden Glieder der rechten Seite sich gegenseitig aufheben.

§ 16. Beispiele, Anwendungen und Übungsaufgaben.

Die Lage eines beliebigen Punktes R werde durch den Vektor $\mathfrak{r}$ bestimmt, der von einem festen Punkt O zu R hinführt. Eine beliebige Bewegung des Punktes R wird dadurch dargestellt, dass wir den Vektor $\mathfrak{r}$ als Funktion der Zeit t auffassen. Eine gleichförmige geradlinige Bewegung z. B. ist durch eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}t$$

dargestellt, wo $\mathfrak{r}_0$ die Lage des Vektors zur Zeit $t = 0$ und $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor darstellt.

Es stelle

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + \mathfrak{v}'t$$

eine andere gleichförmige geradlinige Bewegung dar. Wir fragen nach der kürzesten Entfernung der beiden Geraden.

Zu dem Ende bilden wir einen Vektor

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}',$$

der auf beiden Geraden senkrecht steht und reduzieren ihn auf die Länge Eins, indem wir ihn durch die Quadratwurzel des skalaren Produktes mit sich selbst dividieren

$$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}}}.$$

Jetzt wählen wir einen Vektor, der von irgendeinem Punkt der einen Geraden zu irgendeinem Punkt der anderen Geraden führt, z. B.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}$$

für einen beliebigen Wert von t.

Dann ist

$$\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a}$$

die kürzeste Entfernung. In Fig. 18 denke man sich beide Gerade parallel der Zeichenebene, die stärker ausgezogene über der anderen liegend. Der Vektor $\mathfrak{e}$ von der Länge Eins ist dann senk-

recht zur Ebene der Zeichnung entweder nach oben oder nach unten gerichtet, je nachdem die Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren zueinander liegen. Sind sie z. B. in Richtung der beiden Pfeile, so ist $\mathfrak{e}$ nach oben gerichtet und $\mathfrak{e}\,.\,\mathfrak{a}$ ist in diesem Falle positiv gleich dem kürzesten Abstand.

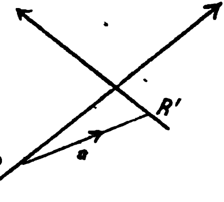


Fig. 18.

Hat man ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde gelegt, auf das die beiden Bewegungen bezogen werden sollen, so hat man die Vektoren aus den drei Einheitsvektoren des Koordinatensystems numerisch abzuleiten und die vorkommenden skalaren und vektoriellen Produkte nach den oben erörterten Regeln auszuführen. Um einen Überblick über den Gang der Rechnung zu geben, möge für den Fall eines rechtsgewundenen Koordinatensystems von drei aufeinander rechtwinkligen Einheitsvektoren von der Länge Eins $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein numerisches Beispiel ausführlich angegeben werden

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}t; \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + \mathfrak{v}'t$$

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	
$\mathfrak{r}_0$:	2	3	−5	
$\mathfrak{r}_0'$:	5	−6	2	
$\mathfrak{r}_0' - \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a}$:	3	−9	+7	
$\mathfrak{v}$:	1	2	6	
$\mathfrak{v}'$:	−1	−3	1	
$\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}' = \mathfrak{n}$:	20	−7	−1	$\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{n} = 450$

$$\frac{\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{n}}} = \mathfrak{e}\,.\,\mathfrak{a} = \frac{116}{\sqrt{450}}.$$

Beim Rechnen empfiehlt es sich, wie hier geschehen, die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, aus denen die übrigen numerisch abgeleitet werden, nicht bei jedem Vektor hinzuschreiben, sondern Kolonnen einzurichten, die ihnen entsprechen und in die man die betreffenden Masszahlen einsetzt. Beim vektoriellen Produkt ist nur zu beachten, dass es nach dem distributiven Gesetz ausgeführt wird und dass hier $\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}$ ist.

Sei $\mathfrak{a}$ ein gegebener Vektor von der Länge Eins und a eine gegebene positive oder negative Zahl, so drückt die Gleichung

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{r} = a$$

die Bedingung aus, dass die senkrechte Projektion von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{a}$ die Länge a haben und je nachdem a positiv oder negativ ist, die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{a}$ haben soll.

Denken wir uns also den Vektor $\mathfrak{r}$ von einem festen Anfangspunkt O nach einem Punkt R laufend, der veränderlich sein kann, so ist

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{r} = a$$

die Bedingung dafür, dass der Punkt R in einer bestimmten Ebene senkrecht zu $\mathfrak{a}$ liegt, deren Entfernung von O a Längeneinheiten beträgt und von O aus entweder nach der Seite liegt, nach der $\mathfrak{a}$ hinzeigt oder nach der entgegengesetzten, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Ist R′ ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Ebene liegt und $\mathfrak{r}'$ der Vektor, der von O nach R′ führt, so führt $\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}$ von R nach R′ und

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{r}' - \mathfrak{r})$$

ist der kürzeste Abstand des Punktes R′ von der Ebene. Durch Anwendung des distributiven Gesetzes können wir dafür auch schreiben

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{r}' - a.$$

Der Ausdruck ist positiv auf der Seite der Ebene, nach der der Vektor $\mathfrak{a}$ gerichtet ist.

Sei ausser der Ebene

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{r} = a$$

eine Gerade

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v} t$$

gegeben, längs der eine gleichmässige Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vor sich geht.

In welchem Augenblick trifft der Punkt die Ebene?

Um den Wert von t zu finden, haben wir nur den Ausdruck für $\mathfrak{r}$ skalar mit $\mathfrak{a}$ zu multiplizieren und das Produkt gleich a zu setzen

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v} t) = a$$

oder

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{r}_0 + (\mathfrak{a} . \mathfrak{v}) t = a,$$

somit

$$\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{a} . \mathfrak{r}_0}{\mathfrak{a} . \mathfrak{v}}.$$

Der Ort des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ebene ergibt sich damit gleich

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{t}\mathfrak{v},$$

wo für t der ermittelte Wert einzusetzen ist.

Es seien drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gegeben, die numerisch voneinander unabhängig sind. Aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ lässt sich dann jeder Vektor $\mathfrak{p}$ numerisch ableiten

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c},$$

und die Masszahlen x, y, z lassen sich, wie wir oben sahen, durch äussere Multiplikation mit den Plangrössen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berechnen

$$\mathfrak{p}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = x\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \ \mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{a} = y\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \ \mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = z\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Wir wollen statt der Plangrössen ihre Ergänzungen dividiert durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ einführen und für diese drei Vektoren die Bezeichnungen $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ einführen

(1) $$\mathfrak{a}^* = \frac{|\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \ \mathfrak{b}^* = \frac{|\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \ \mathfrak{c}^* = \frac{|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \ \mathfrak{b}^* = \frac{\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \ \mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.$$

Statt der äusseren Produkte von $\mathfrak{p}$ mit $\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ können wir dann die skalaren Produkte mit $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ schreiben, so dass wir erhalten

$$\mathfrak{p} . \mathfrak{a}^* = x, \ \mathfrak{p} . \mathfrak{b}^* = y, \ \mathfrak{p} . \mathfrak{c}^* = z$$

oder, wenn wir einsetzen,

(2) $$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} . \mathfrak{a}^*)\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{p} . \mathfrak{b}^*)\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{p} . \mathfrak{c}^*)\,\mathfrak{c}.$$

Jeder Vektor $\mathfrak{p}$ lässt sich auf diese Weise durch die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ ausdrücken. Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ erhalten wir

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} . \mathfrak{a}^*)\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} . \mathfrak{b}^*)\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{a} . \mathfrak{c}^*)\,\mathfrak{c}.$$

Folglich ist $\mathfrak{a} . \mathfrak{a}^* = 1$, $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}^* = 0$, $\mathfrak{a} . \mathfrak{c}^* = 0$ und ebenso ist $\mathfrak{b} . \mathfrak{b}^* = 1$, $\mathfrak{c} . \mathfrak{c}^* = 1$, während alle übrigen skalaren Produkte der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit den $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ verschwinden. Es zeigt sich nun, dass die Beziehungen zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ reziprok sind. Wenn

man nämlich die vektoriellen Produkte $\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^*$, $\mathfrak{c}^* \times \mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}^* \times \mathfrak{b}^*$ bildet, z. B.

$$\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^* = \frac{(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \times \mathfrak{c}^*,$$

so erhalten wir nach der oben entwickelten Formel (§ 15, Gl. 7)

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{s} = (\mathfrak{p} . \mathfrak{s})\mathfrak{r} - (\mathfrak{r} . \mathfrak{s})\mathfrak{p}$$

$$(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{c}^* = (\mathfrak{c} . \mathfrak{c}^*)\mathfrak{a} - (\mathfrak{a} . \mathfrak{c}^*)\mathfrak{c} = \mathfrak{a},$$

also

$$\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

und

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^* = \mathfrak{a}^* . (\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^*) = \frac{\mathfrak{a}^* . \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$

folglich

(3) $$\frac{\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^*}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} = \mathfrak{a}$$

und analog

$$\frac{\mathfrak{c}^* \times \mathfrak{a}^*}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} = \mathfrak{b}, \quad \frac{\mathfrak{a}^* \times \mathfrak{b}^*}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} = \mathfrak{c}.$$

Dieselben Operationen also, die aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Vektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ ableiten, leiten aus $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ab. Wir sagen daher, das eine System von Vektoren ist dem anderen reziprok. Wenn statt des Systems $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ das System $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{c}}$, gesetzt wird, wo $\bar{\mathfrak{a}} = n\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$, so wird das reziproke System $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ übergehen in

$$\bar{\mathfrak{a}}^* = \frac{\bar{\mathfrak{b}} \times \bar{\mathfrak{c}}}{\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}} = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{n\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{1}{n}\mathfrak{a}^*$$

$$\bar{\mathfrak{b}}^* = \frac{\bar{\mathfrak{c}} \times \bar{\mathfrak{a}}}{\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}} = \frac{n\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}}{n\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{b}^*$$

$$\bar{\mathfrak{c}}^* = \frac{\bar{\mathfrak{a}} \times \bar{\mathfrak{b}}}{\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}} = \frac{n\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{n\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^*.$$

D. h., wenn $\mathfrak{a}$ allein proportional geändert wird, so ändert sich im reziproken System $\mathfrak{a}^*$ allein, und zwar im reziproken Verhältnis. Die Wahl der Längeneinheit hat einen Einfluss auf die Beziehung zweier reziproken Systeme. Hält man nämlich das eine System, z. B. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, fest und wählt die Längeneinheit n mal so gross, so bleiben

die vektoriellen Produkte $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, wie schon oben bemerkt worden ist, nicht unverändert, sondern nehmen $1/n$ ihrer vorigen Länge an. Die Masszahl von $\mathfrak{abc}$ ist aber dann $1/n^3$ so gross wie vorher. Mithin werden $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ dieselbe Richtung haben, wie vorher aber n^2 mal so lang sein. Durch passende Wahl der Längeneinheit kann man immer erreichen, dass $\mathfrak{abc}$ gleich ± 1 wird und durch passende Wahl der Reihenfolge, in der man die Vektoren mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet, dass $\mathfrak{abc} = 1$ wird. Dann ist auch $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^* = 1$.

Wenn man alle Vektoren

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c},$$

die man für ganzzahlige Werte von x, y, z aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch ableitet, von einem festen Punkte O aus abträgt, so bilden ihre Endpunkte P ein sogenanntes Raumgitter. Der Vektor, der von irgendeinem Punkte P des Gitters zu einem anderen Gitterpunkt P′ führt, ist durch die Differenz $\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}$ der beiden von O nach P′ und P führenden Vektoren dargestellt und kann daher auch durch ganze Zahlen aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ abgeleitet werden. Von O aus abgetragen, muss $\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}$ daher auch zu einem Gitterpunkt führen. Mit anderen Worten, die Vektoren, die von irgendeinem Gitterpunkt P zu den übrigen Gitterpunkten führen, sind dieselben, die von jedem anderen Gitterpunkt ausgehen. Wir nennen sie die Vektoren des Raumgitters.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Gittervektor, so ist auch jedes positive oder negative ganze Vielfache

$$n\mathfrak{p}$$

ein Gittervektor. Alle Punkte, zu denen man durch Abtragen dieser Vektoren von einem Gitterpunkte aus gelangt, liegen auf einer Geraden und teilen sie in gleiche Intervalle. Wenn innerhalb dieser Intervalle noch andere Gitterpunkte liegen, so gibt es einen Gittervektor $\mathfrak{q}$, der dieselbe Richtung hat wie $\mathfrak{p}$, aber nicht grösser als $\mathfrak{p}/2$ ist. Mit diesem erhalten wir eine andere Einteilung der Geraden in gleiche Intervalle. Würden wieder in diesen Intervallen Gitterpunkte liegen, so würden diese abermals Gittervektoren bestimmen, die nicht grösser als $\mathfrak{q}/2$ sind. Dieser Prozess muss ein Ende haben. Denn hätte er es nicht, so würde man zu Gittervektoren $\mathfrak{s}$ von beliebig kleiner Länge kommen. Dann aber müssten deren Masszahlen $\mathfrak{s}.\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{s}.\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{s}.\mathfrak{c}^*$ in bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auch beliebig klein

sein, ohne alle drei zu verschwinden. Das ist nicht möglich, weil die Masszahlen ganze Zahlen sind. Also gelangt man auf jeder Geraden, die Gitterpunkte verbindet zu einer Einteilung in gleiche Intervalle, die alle auf der Geraden liegende Gitterpunkte als Teilpunkte enthält. Der Gittervektor $\mathfrak{u}$, der einem solchen Intervall entspricht, liefert durch seine positiven und negativen ganzen Vielfachen alle Gittervektoren, die dieser Geraden parallel sind. Seine Masszahlen $\mathfrak{u}.\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{u}.\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{u}.\mathfrak{c}^*$ dürfen keinen gemeinsamen Teiler haben. sonst wäre er selbst ein ganzes Vielfache eines kleineren Gittervektors. Umgekehrt, wenn seine Masszahlen keinen gemeinsamen Teiler haben, so sind alle zu $\mathfrak{u}$ parallelen Gittervektoren ganze Vielfache von $\mathfrak{u}$. Denn wären sie es nicht, so müsste $\mathfrak{u}$ gleich einem ganzen Vielfachen eines kleineren Gittervektors sein, was einen gemeinsamen Teiler bedingt.

Durch jeden Gitterpunkt denken wir uns nun eine Gerade parallel $\mathfrak{u}$ gelegt. Auf jeder dieser Geraden bilden die aufeinander folgenden Gitterpunkte die Intervalle $\mathfrak{u}$. Nun legen wir durch irgendeinen Gitterpunkt einer solchen Geraden und irgendeinen Gitterpunkt ausserhalb derselben eine Ebene. Die Gitterpunkte dieser Ebene lassen sich auf einer Schar von Geraden parallel $\mathfrak{u}$ anordnen. Denn durch jeden Gitterpunkt läuft eine Gerade parallel $\mathfrak{u}$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Gittervektor der Ebene, der von einer dieser Geraden zu einer anderen läuft. Der numerische Wert der Plangrösse $\mathfrak{u}\mathfrak{p}$ ist dann gleich dem Produkt der Länge von $\mathfrak{u}$ in den Abstand der beiden Geraden. Indem man die Vielfachen von $\mathfrak{p}$ bildet, erhält man eine Schar von äquidistanten Gittergeraden der Ebene. Liegen nun zwischen ihnen noch andere Gittergeraden, so hat eine von ihnen von einer Geraden der Schar einen Abstand, der höchstens halb so gross ist, wie der Abstand zweier benachbarten Geraden der Schar. Man kann also einen Gittervektor $\mathfrak{q}$ der Ebene finden, so dass $\mathfrak{u}\mathfrak{q}$ höchstens halb so gross ist wie $\mathfrak{u}\mathfrak{p}$. Die ganzen Vielfachen von $\mathfrak{q}$ liefern dann eine neue Schar von äquidistanten Geraden parallel $\mathfrak{u}$. Liegen noch andere zwischen ihnen, so kann wieder ein Gittervektor $\mathfrak{s}$ der Ebene gefunden werden, für den $\mathfrak{u}\mathfrak{s}$ höchstens halb so gross ist wie $\mathfrak{u}\mathfrak{q}$. Dieser Prozess muss ein Ende haben. Denn sonst würde man zu beliebig kleinen Plangrössen $\mathfrak{u}\mathfrak{s}$ gelangen, die das äussere Produkt zweier Gittervektoren sind. Das ist

aber nicht möglich. Denn die Masszahlen der Plangrösse $\mathfrak{u}\mathfrak{s}$ bezogen auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sind gleich

$$\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{s}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},\ \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{s}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},\ \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{s}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

und sind demnach ganze Zahlen, da die von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ es sind. Eine von ihnen muss also mindestens gleich 1 sein, kann also nicht einem beliebig kleinen $\mathfrak{u}\mathfrak{s}$ angehören. Mithin muss es einen Gittervektor $\mathfrak{v}$ geben derart, dass $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ die kleinste Plangrösse ist, die durch das äussere Produkt von $\mathfrak{u}$ mit einem Gittervektor dieser Ebene erhalten werden kann. Die dem ganzen Vielfachen dieses Vektors $\mathfrak{v}$ entsprechenden Geraden bilden gleiche Intervalle und enthalten alle Gitterpunkte der Ebene. Alle Gittervektoren der Ebene sind dann aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ durch ganze Zahlen numerisch ableitbar

$$n\mathfrak{u} + m\mathfrak{v}.$$

Die Gitterpunkte bilden ein Netz von Parallelogrammen, die $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zu Seiten haben.

Durch jeden Gitterpunkt denken wir uns eine Ebene parallel $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ gelegt und beweisen wieder, dass sie äquidistant sein müssen. Betrachten wir nämlich eine solche Ebene und einen beliebigen Gittervektor $\mathfrak{p}$, der von einem ihrer Gitterpunkte zu einem ausserhalb gelegenen führt. Der Abstand zwischen der Ebene und einer durch den Endpunkt von $\mathfrak{p}$ parallel zu ihr gelegten Ebene ist gleich dem numerischen Wert von

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}$$

dividiert durch den numerischen Wert von $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$. Die ganzen Vielfachen von $\mathfrak{p}$ führen zu einer Schar solcher parallelen Ebenen mit dem gleichen Abstand. Liegen nun zwischen diesen Ebenen noch andere Gitterebenen, so hat eine von ihnen von einer der Ebenen der Schar höchstens den halben Abstand. Ein Gittervektor $\mathfrak{q}$, der von ihr zu dieser führt, liefert dann einen Wert

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{q},$$

der absolut genommen höchstens halb so gross ist wie $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}$. Die ganzen Vielfachen von $\mathfrak{q}$ führen zu einer neuen Schar von äquidistanten Gitterebenen parallel $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$. Wenn zwischen diesen noch weitere Gitterebenen parallel $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ liegen, so erhält man abermals einen Abstand, der höchstens halb so gross ist und einem Gittervektor $\mathfrak{s}$

für den $\mathfrak{uvs}$ höchstens halb so gross ist wie $\mathfrak{uvq}$. Dieser Prozess muss ein Ende haben. Denn sonst würde man zu beliebig kleinen Werten von $\mathfrak{uvs}$ gelangen; nun ist aber

$$\frac{\mathfrak{uvs}}{\mathfrak{abc}}$$

eine ganze von Null verschiedene Zahl und daher mindestens gleich 1 absolut genommen. Folglich darf $\mathfrak{uvs}$ absolut genommen nicht kleiner sein als $\mathfrak{abc}$ und kann also nicht beliebig klein werden. Es gibt mithin einen Gittervektor $\mathfrak{w}$ von der Art, dass $\mathfrak{uvw}$ den kleinsten Wert hat, den es mit irgendeinem Gittervektor $\mathfrak{w}$ geben kann, der der Plangrösse nicht parallel ist.

Alle Gitterpunkte sind dann in Ebenen parallel $\mathfrak{uv}$ angeordnet. Die Ebenen sind äquidistant in einem Abstand, der sich aus dem Wert von $\mathfrak{uvw}$ ergibt, wenn man ihn durch den Wert von $\mathfrak{uv}$ dividiert. Alle Gittervektoren sind dann durch ganze Zahlen aus $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ numerisch ableitbar. Da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ selbst auch Gittervektoren sind, so sind sie auch durch ganze Zahlen aus $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ numerisch ableitbar. Folglich ist $\frac{\mathfrak{abc}}{\mathfrak{uvw}}$ eine ganze Zahl, ebenso wie $\frac{\mathfrak{uvw}}{\mathfrak{abc}}$. Wenn also $\frac{\mathfrak{abc}}{\mathfrak{uvw}} = N$, so muss $\frac{1}{N}$ ebenfalls eine ganze Zahl sein, folglich $N = \pm 1$. Der Abstand der Gitterebenen parallel $\mathfrak{uv}$ ist also gleich $\mathfrak{abc}$ dividiert durch den numerischen Wert dieser Plangrösse.

Da jeder Gittervektor aus $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch ganze Zahlen numerisch abgeleitet werden kann, so können auch die Plangrössen $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{ab}$ ganzzahlig aus $\mathfrak{vw}$, $\mathfrak{wu}$, $\mathfrak{uv}$ abgeleitet werden. Man braucht die Ausdrücke für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nur einzusetzen und auszumultiplizieren. Mithin sind auch alle Plangrössen des Gitters, d. h. alle Plangrössen, die aus $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{ab}$ durch ganze Zahlen abgeleitet werden können, aus $\mathfrak{vw}$, $\mathfrak{wu}$, $\mathfrak{uv}$ ganzzahlig ableitbar. Ist eine solche Plangrösse der Plangrösse $\mathfrak{uv}$ parallel, so muss sie also ein ganzes Vielfaches von $\mathfrak{uv}$ sein. Die Masszahlen von $\mathfrak{uv}$ können daher keinen gemeinsamen Teiler haben und umgekehrt, wenn eine Plangrösse des Gitters $\mathfrak{uv}$ parallel ist und wenn ihre Masszahlen keinen gemeinsamen Teiler haben, so kann sie sich von $\mathfrak{uv}$ höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden. Denn andernfalls wäre sie ein ganzes Vielfaches von $\mathfrak{uv}$, was einen gemeinsamen Teiler der Masszahlen bedingen würde.

Jede Plangrösse $\mathfrak{F}$ des Gitters

$$\mathfrak{F} = \xi\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \eta\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \zeta\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

(ξ, η, ζ ganze Zahlen), ist einer Schar von Gitterebenen parallel. Um das zu zeigen, denken wir uns eine Ebene durch den Gitterpunkt 0 parallel zu $\mathfrak{F}$. Dann ist $\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = -\eta\mathfrak{c} + \zeta\mathfrak{b}$ ein Vektor parallel der Schnittlinie dieser Ebene mit einer Ebene parallel $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{c}\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \xi\mathfrak{c} - \zeta\mathfrak{a}$ ein Vektor parallel der Schnittlinie der Ebene mit einer Ebene parallel $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$. Beides sind Gittervektoren, die zusammen eine zu $\mathfrak{F}$ parallele Gitterebene bestimmen.

In dieser Gitterebene können wir, wie oben gezeigt, zwei Gittervektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ bestimmen, durch die alle Gittervektoren der Ebene ganzzahlig ausgedrückt werden können. Wenn ξ, η, ζ also keinen gemeinsamen Teiler haben, so kann man die Gitterpunkte in äquidistanten Ebenen parallel der Plangrösse

$$\mathfrak{F} = \xi\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \eta\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \zeta\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

anordnen mit einem Abstand gleich dem Quotienten aus dem numerischen Werte von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, dividiert durch den von $\mathfrak{F}$.

Die Ergänzungen aller Plangrössen $\mathfrak{F}$ unseres Raumgitters bilden ebenfalls die Vektoren eines Raumgitters. Wir wollen sie noch durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ dividieren.

Dann können wir die zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ reziproken Vektoren $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*$ einführen und schreiben

$$\left| \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \xi\mathfrak{a}^* + \eta\mathfrak{b}^* + \zeta\mathfrak{c}^*. \right.$$

Wir nennen dieses Raumgitter das zu dem ersten reziproke und umgekehrt. Jeder Plangrösse des einen Gitters entspricht ein auf ihr senkrechter Vektor des anderen, dessen numerischer Wert gleich dem Quotienten des numerischen Wertes der Plangrösse durch den des äusseren Produktes seiner drei Einheitsvektoren ist. Der reziproke Wert dieses Quotienten ist gleich dem Abstand der Ebenen des einen Gitters, die auf dem Vektor des anderen senkrecht stehen. Oder in Formeln: Der Abstand der Ebenen des Gitters $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die auf dem Vektor

$\xi\mathfrak{a}^* + \eta\mathfrak{b}^* + \zeta\mathfrak{c}^*$ (ξ, η, ζ ohne gemeinsamen Teiler) senkrecht stehen, ist gleich

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi\mathfrak{a}^* + \eta\mathfrak{b}^* + \zeta\mathfrak{c}^*).(\xi\mathfrak{a}^* + \eta\mathfrak{b}^* + \zeta\mathfrak{c}^*)}},$$

oder das reziproke Quadrat des Abstandes ist gleich

$$\xi^2\mathfrak{a}^*.\mathfrak{a}^* + \eta^2\mathfrak{b}^*.\mathfrak{b}^* + \zeta^2\mathfrak{c}^*.\mathfrak{c}^* + 2\eta\zeta\mathfrak{b}^*.\mathfrak{c}^* + 2\zeta\xi\mathfrak{c}^*.\mathfrak{a}^* + 2\xi\eta\mathfrak{a}^*.\mathfrak{b}^*.$$

Die Koeffizienten von ξ^2, η^2, ζ^2 sind die Quadrate der Längen der Vektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$. Die Koeffizienten von $2\eta\zeta$, $2\zeta\xi$, $2\xi\eta$ sind die Produkte zweier Längen in den Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Wenn wir also die sechs Koeffizienten kennen, so kennen wir damit die Lage der drei Vektoren zueinander. Wir können das Gitter $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ und damit auch das dazu reziproke Gitter konstruieren, wenn man davon absieht, dass die ganze Figur noch im Raume beliebig gedreht oder verschoben werden kann.

Auf dieser Betrachtung beruht eine Methode, das Raumgitter eines Kristalls durch die Interferenz von Röntgenstrahlen zu ermitteln. Wenn von einem Punkte A Licht von der Wellenlänge λ ausgeht und auf eine Gruppe von materiellen Punkten P fallend, diese wieder zu Lichtquellen macht, die das Licht nach allen Seiten zerstreuen, so wird dadurch in einem Punkte B nur dann eine namhafte Lichtbewegung erzeugt, wenn in B eine hinreichend überwiegende Menge dieser Lichtwellen mit gleicher Phase eintrifft, d. h. wenn für sie die Wege $AP + PB$ entweder die gleiche Länge haben oder sich nur um ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge λ voneinander unterscheiden, also wenn für eine überwiegende Menge von Punkten PP'

$$AP' + P'B - AP - PB = \pm n\lambda,$$

wo n eine ganze Zahl ist[1]. Ist nun die Entfernung PP' so klein gegen AP und PB, dass der Richtungsunterschied von AP und AP' und ebenso der von PB und $P'B$ vernachlässigt werden kann, so ist mit hinreichender Annäherung

$$AP' - AP = \mathfrak{p}.\mathfrak{n}_e,$$
$$P'B - PB = -\mathfrak{p}.\mathfrak{n}_a,$$

[1]) Es ist genau genommen nicht erforderlich, dass die Wegunterschiede ganze Vielfache der Wellenlänge sind. Zwei Wellen verstärken sich auch dann schon, wenn der Gangunterschied weniger als $^1/_4\,\lambda$ beträgt.

wo $\mathfrak{p}$ den Vektor PP′, $\mathfrak{n}_e$ den Vektor von der Länge eins, der die Richtung der einfallenden Strahlen angibt, und $\mathfrak{n}_a$ den entsprechenden Vektor für die austretenden Strahlen bedeutet (Fig. 19).

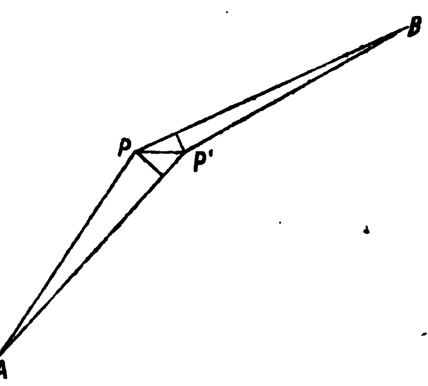


Fig. 19.

Die Bedingung für eine namhafte Lichtbewegung in B ist demnach

$$\mathfrak{p} . \mathfrak{n}_e - \mathfrak{p} . \mathfrak{n}_a$$
$$= \mathfrak{p} . (\mathfrak{n}_e - \mathfrak{n}_a) = \pm n \lambda.$$

Wird der Winkel zwischen der Richtung des einfallenden und der Richtung des austretenden Lichtes mit ϑ bezeichnet, so ist die Länge des Vektors $\mathfrak{n}_e - \mathfrak{n}_a$ gleich $2 \sin \vartheta/2$. Wir können also schreiben

$$\mathfrak{n}_e - \mathfrak{n}_a = 2 \sin \vartheta/2 \, \mathfrak{s},$$

wo $\mathfrak{s}$ einen Vektor von der Länge eins bedeutet (Fig. 20). Die Bedingung nimmt damit die Form an

$$\mathfrak{p} . \mathfrak{s} = \pm n \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta/2}.$$

Nun bedeutet $\mathfrak{p} . \mathfrak{s} = 0$ bei Festhaltung von P für eine Gruppe von Punkten P′, dass alle diese Punkte P′ in derselben Ebene mit P liegen, die auf $\mathfrak{s}$ senkrecht steht, $\mathfrak{p} . \mathfrak{s} = c$ bedeutet, dass alle Punkte P′ in einer zu $\mathfrak{s}$ senkrechten Ebene liegen, die von P um die Länge c entfernt ist (für positives c nach der Seite von $\mathfrak{s}$, für negatives c nach der entgegengesetzten Seite).

Fig. 20.

$$\mathfrak{p} . \mathfrak{s} = \pm n c$$

bedeutet mithin, dass die Punkte P′ sich in äquidistanten Ebenen anordnen lassen mit dem Abstand c.

Bilden nun die Punkte P, P′ ein Raumgitter, so ist, wie wir gesehen haben, die Anordnung in äquidistanten Ebenen in mannigfacher Weise möglich. Für das Gitter

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}$$

waren die vorkommenden Abstände der äquidistanten Ebenen durch den reziproken numerischen Wert des Vektors

$$\mathfrak{q} = \xi\mathfrak{a}^* + \eta\mathfrak{b}^* + \zeta\mathfrak{c}^*$$

gegeben, wo für ξ, η, ζ drei beliebige ganze positive oder negative Zahlen ohne gemeinsamen Teiler einzusetzen waren. Der Vektor $\mathfrak{q}$ steht dabei auf den zugehörigen äquidistanten Ebenen senkrecht und ist also parallel $\mathfrak{s}$.

Die Bedingung

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{s} = \pm \frac{n\lambda}{2 \sin \vartheta/2}$$

bedeutet also, dass

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}}} = \pm \frac{n\lambda}{2 \sin \vartheta/2},$$

oder dass

$$n^2 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q} \lambda^2 = 4 \sin^2 \vartheta/2.$$

Für $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}$ können wir die quadratische Form in ξ, η, ζ schreiben und die Multiplikation mit n^2 können wir dadurch ausdrücken, dass wir ξ, η, ζ von der Bedingung befreien, keinen gemeinsamen Teiler zu haben, so dass also in der Gleichung

$$(\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a}^* \xi^2 + \mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{b}^* \eta^2 + \mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{c}^* \zeta^2 + 2\mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{c}^* \eta\zeta + 2\mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{a}^* \zeta\xi$$
$$+ 2\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{b}^* \xi\eta) \lambda^2 = 4 \sin^2 \vartheta/2$$

ξ, η, ζ irgendwelche positiven oder negativen Zahlen sein können.

Wenn man es nur mit einer Ebene von Gitterpunkten zu tun hätte, so würde nur die Bedingung $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{s} = 0$ in Frage kommen. Das ist die Bedingung der gewöhnlichen Reflexion an einer Ebene. Dann wäre aber in der Gleichung

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{s} = \pm \frac{n\lambda}{2 \sin \vartheta/2}$$

$n = 0$, und der Reflexionswinkel bliebe ganz beliebig. Dadurch, dass auch die anderen Ebenen hinzukommen, fordert jede Ebenenschar bestimmte Reflexionswinkel.

Durch das Experiment werden nun für alle möglichen Orientierungen des Raumgitters gegen das einfallende Licht die Winkel ϑ zwischen dem einfallenden und austretenden Licht gemessen, bei denen eine merkliche Intensität austritt.

Aus dem Winkel ϑ und der Wellenlänge λ bestimmen sich dann numerische Werte von

$$\mathfrak{a}^*\xi + \mathfrak{b}^*\eta + \mathfrak{c}^*\zeta,$$

die für dieses Gitter möglich sind. Daraus lässt sich die Gestalt des Gitters $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ ermitteln und damit auch die des Gitters $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Übungsaufgaben.

Vier Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 seien durch die vier Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ gegeben, die von einem Punkte O zu ihnen hinführen. Man bilde die drei Vektoren

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_1$$

und zeige, dass der Abstand des Punktes R_4 von der Ebene $R_1R_2R_3$ gleich

$$\frac{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}}{\sqrt{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}'}}$$

ist, wo $\mathfrak{c}'$ für $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ geschrieben ist. Man überlege, was das positive und was das negative Zeichen von $\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}$ für die Lage der Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 zueinander bedeutet. Man zeige ferner, dass

$$\frac{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}}{\sqrt{(\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}').(\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}')}},$$

wo $\mathfrak{b}'$ für $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ geschrieben ist, den kürzesten Abstand zwischen der Geraden R_1R_2 und der Geraden R_3R_4 darstellt.

Denkt man sich die Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 durch rechtwinkelige Koordinaten mit dem Anfangspunkt O gegeben (in der gleichen Längeneinheit gemessen), so sind die Koordinaten zugleich Masszahlen, durch die $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ aus den drei Einheitsvektoren des Koordinatensystems abgeleitet werden. Man führe für irgendwelche speziellen Annahmen der Koordinaten die Rechnungen aus, z. B.

$\mathfrak{r}_1$:	1	−1	2
$\mathfrak{r}_2$:	−1	2	1
$\mathfrak{r}_3$:	2	−1	3
$\mathfrak{r}_4$:	3	1	−5

Daraus

$\mathfrak{a}$:	−2	3	−1
$\mathfrak{b}$:	1	0	1
$\mathfrak{c}$:	2	2	−7

Daraus	$\mathfrak{a}'$:	-2	9	2
	$\mathfrak{b}'$:	19	16	10
	$\mathfrak{c}'$:	3	1	-3

Probe: $\mathfrak{a}.\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}.\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}.\mathfrak{c}' = 29$

$\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}'$:	22	17	7

$$\frac{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}}{\sqrt{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}'}} = \frac{29}{\sqrt{19}}; \quad \frac{\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}}{\sqrt{(\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}').(\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}')}} = \frac{29}{\sqrt{822}}.$$

Kapitel II.

Das Differenzieren und Integrieren von Vektoren und Plangrössen.

§ 1. Differenziationsregeln.

Ein Punkt R bewege sich im Raume, und die Bewegung sei dadurch bestimmt, dass der Vektor $\mathfrak{r}$, der von einem festen Punkt O zu R hinführt, als Funktion der Zeit t gegeben ist. Das mag dadurch geschehen, dass die drei Masszahlen, durch die der Vektor aus drei gegebenen voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet werden kann, als Funktionen der Zeit gegeben sind.

Wir verstehen dann unter

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

den Vektor, dessen Masszahlen in bezug auf dieselben drei Vektoren die Differentialquotienten nach t der Masszahlen von $\mathfrak{r}$ sind, d. h. den Vektor der Geschwindigkeit. Es ist der Grenzwert, dem sich der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta t} = \frac{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1}{t - t_1}$$

nähert, wenn man t und t_1 zusammenrücken lässt. $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$ ist dabei der Vektor, der von der Lage des Punktes zur Zeit t_1 in die Lage zur Zeit t führt. Eine Reihe von Regeln der Differentialrechnung lassen sich nun ohne weiteres auf die Differentiation von Vektoren und ihrer Produkte übertragen. Die Beweise sind so einfach

zu führen, indem man die Masszahlen der Vektoren betrachtet, dass es nicht nötig ist sie ausführlich zu besprechen. Nur die Regeln selbst müssen angeführt werden, damit sie sich dem Gedächtnis einprägen.

Der Differentialquotient einer Summe ist gleich der Summe der Differentialquotienten der Summanden

$$\frac{d(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

und ebenso für eine Summe von beliebig vielen Vektoren.

Ein konstanter Zahlfaktor tritt bei der Differentiation heraus

$$\frac{d(a\mathfrak{p})}{dt} = a\frac{d\mathfrak{p}}{dt}.$$

Ist der Faktor auch eine Funktion von t, so geschieht die Differentiation des Produktes nach derselben Regel wie bei einem Produkt zweier Funktionen

$$\frac{d(a\mathfrak{p})}{dt} = \frac{da}{dt}\mathfrak{p} + a\frac{d\mathfrak{p}}{dt}.$$

Dieselbe Regel gilt auch für das skalare und für das vektorielle Produkt zweier Vektoren

$$\frac{d(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathfrak{p}\times\mathfrak{q})}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\times\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\times\frac{d\mathfrak{q}}{dt}.$$

Man kann den Beweis statt über die Masszahlen auch direkt führen durch die Betrachtung der Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{q}_1\\ &= (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_1)\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_1\cdot(\mathfrak{q}-\mathfrak{q}_1)\end{aligned}$$

oder, wenn Δ die Differenz bezeichnet

$$\Delta(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}) = \Delta\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_1 . \Delta\mathfrak{q}$$

und daher

$$\frac{\Delta(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathfrak{p}}{\Delta t}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_1\frac{\Delta\mathfrak{q}}{\Delta t}.$$

Sind nun $\frac{\Delta\mathfrak{p}}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta\mathfrak{q}}{\Delta t}$ hinreichend wenig von $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ und $\mathfrak{p}_1$ hinreichend wenig von $\mathfrak{p}$ verschieden, so ist die rechte Seite beliebig wenig von

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

verschieden. Mit anderen Worten, dies ist der Grenzwert, dem sich $\frac{\Delta(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q})}{\Delta t}$ nähert, wenn t und t_1 zusammenrücken. Die gleiche Überlegung gilt für $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$. In der Tat beruht der Beweis im wesentlichen nur auf dem distributiven Gesetz, wonach

$$\mathfrak{p} \times \mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q} = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1) \times \mathfrak{q}$$

und

$$\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1 \times (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}_1)$$

gesetzt werden darf.

Was den Beweis über die Masszahlen betrifft, so beruht der im wesentlichen auch auf demselben Umstande. Denn das distributive Gesetz zeigt sich darin, dass die Masszahlen des Produktes lineare Funktionen der Masszahlen jedes einzelnen Vektors sind.

Ebenso wie den Differentialquotienten eines Vektors definieren wir den Differentialquotienten einer Plangrösse. Die Masszahlen, durch die eine Plangrösse aus drei gegebenen Plangrössen numerisch abgeleitet wird, seien Funktionen von t. Dann heisst die Plangrösse selbst eine Funktion von t und ihr Differentialquotient ist die Plangrösse, deren Masszahlen die Differentialquotienten jener drei Funktionen sind.

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ die Ergänzung einer Plangrösse $\mathfrak{A}$, so hat $\mathfrak{a}$, wie früher gezeigt, dieselben Masszahlen wie $\mathfrak{A}$, wenn wir ihn numerisch ableiten aus den drei Vektoren, welche die Ergänzungen der Plangrössen bilden, aus denen $\mathfrak{A}$ abgeleitet ist. Daraus folgt, dass in bezug auf dieselben drei Vektoren auch der Differentialquotient von $\mathfrak{a}$ dieselben Masszahlen hat wie der Differentialquotient von $\mathfrak{A}$, mit anderen Worten, dass $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ Ergänzungen voneinander sind. Für die Differentiation von Plangrössen und ihren Produkten untereinander und mit Vektoren ergeben sich ebenso eine Reihe von Regeln, die unmittelbar eingesehen werden, ohne dass es nötig wäre, ihre Beweise ausführlich durchzusprechen. Es genügt, die Sätze hinzuschreiben

$$\frac{d(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

und ebenso für beliebig viele Summanden.

Wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$, so ist

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{p})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{p} + \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{r} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Setzt man in der Formel für die Differentiation des skalaren Produktes zweier Vektoren

$$\frac{d(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

die beiden Vektoren einander gleich, so ergibt sich für das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst

$$\frac{d(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p})}{dt} = 2\mathfrak{p}\cdot\frac{d\mathfrak{p}}{dt}.$$

Ebenso wie man in der Differentialrechnung von unendlich kleinen Grössen spricht und dabei das Verfahren meint, dass man eine kleine Grösse beliebig klein werden lässt und dabei das Verhältnis zu anderen gleichzeitig beliebig klein werdenden Grössen betrachet, so wollen wir auch gelegentlich von unendlich kleinen Vektoren sprechen, deren Masszahlen Differentiale sind.

Ist ein Vektor $\mathfrak{r}$ als Funktion einer Variabeln t gegeben, so kann man die Änderung, die $\mathfrak{r}$ erfährt, wenn t um Δt geändert wird, mit Hilfe der Taylorschen Reihe darstellen

$$\Delta\mathfrak{r} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\Delta t + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots$$

Diese Vektorgleichung fasst nur die drei Taylorschen Reihen zusammen, durch die man die Änderungen der Masszahlen nach Potenzen von Δt entwickelt. Bei der Zusammenfassung bedeutet jedes Glied der Taylorschen Reihe einen Vektor, der zu den übrigen im Sinne der Vektoraddition hinzutritt. Das Analoge gilt von einer Plangrösse $\mathfrak{F}$, die als Funktion einer Veränderlichen t betrachtet wird. Auch hier erhalten wir einen Taylorschen Satz in der Form

$$\Delta\mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{F}}{dt}\Delta t + \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots$$

§ 2. Krümmung und Torsion einer Raumkurve.

Wir denken uns den Vektor $\mathfrak{r}$ von einem festen Punkt O aus abgetragen bis zu einem Punkt R, der sich also mit t im Raume verändert. t werde als die Zeit aufgefasst; dann haben wir es mit der Bewegung eines Punktes R im Raume zu tun. Der Vektor

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

ist die Geschwindigkeit der Bewegung der Grösse und Richtung nach. Den absoluten Betrag v der Geschwindigkeit erhalten wir durch die Gleichung

$$v^2 = \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}.$$

Der Vektor

$$\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{v}}{v}$$

hat dieselbe Richtung wie $\mathfrak{v}$, aber die Länge Eins. Wir nennen ihn den Richtungsvektor der Kurve.

$$\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{v}.\mathfrak{v}}{v^2} = 1.$$

Er ist nur von der Gestalt der Kurve und dem Sinn, in dem wir sie durchlaufen, abhängig, d. h. er bleibt ungeändert, wenn wir dieselbe Kurve mit irgendwelchen anderen Geschwindigkeiten durchlaufen. Der Vektor

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

heisst der Beschleunigungsvektor und misst die Änderung des Geschwindigkeitsvektors mit der Zeit.

Die Plangrösse

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

ist der Schmiegungsebene der Kurve in dem betrachteten Punkte parallel. Ihre Ergänzung liefert die Binormale.

Führen wir in den Ausdruck dieser Plangrösse $\mathfrak{F}$ statt des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ den Richtungsvektor $\mathfrak{t}$ ein, so wird

$$\mathfrak{v} = v\,t,\ \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = v\frac{dt}{dt} + \frac{dv}{dt}t.$$

Bildet man nun das äussere Produkt

$$\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{v}\left(v\frac{dt}{dt} + \frac{dv}{dt}t\right),$$

so verschwindet bei Auflösung der Klammer das zweite Glied, weil $\mathfrak{v}t = 0$ ist. Infolgedessen ergibt sich

$$\mathfrak{F} = v^2 t\frac{dt}{dt},$$

oder wenn wir statt der Zeit t die Bogenlänge s einführen

$$\mathfrak{F} = v^3 t\frac{dt}{ds}.$$

Der Vektor $\frac{dt}{ds}$ heisst der Krümmungsvektor. Er misst die Änderung des Richtungsvektors „pro Einheit der Bogenlänge". Der numerische Wert von $\frac{dt}{ds}$ heisst die Krümmung der Kurve in dem betrachteten Punkte. Denkt man sich den Richtungsvektor t von dem festen Punkte O aus abgetragen bis zu einem Punkte T, so wird sich bei der Bewegung der Punkt T auf einer Kugel vom Radius Eins bewegen und dt ist das Bogenelement der Kurve, die T auf der Kugel beschreibt. Der Vektor $\frac{dt}{dt}$ ist der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung von T. Er steht senkrecht auf t, da

$$t \cdot t = 1$$

und folglich, wenn man differentiert

$$t \cdot \frac{dt}{dt} = 0.$$

Bezeichnen wir die Krümmung, d. h. den numerischen Wert von $\frac{dt}{ds}$ mit k, so ist

$$\frac{1}{k}\frac{dt}{ds}$$

ein Vektor von der Länge 1, der parallel der Schmiegungsebene auf dem Richtungsvektor senkrecht steht und nach der Seite zeigt,

wohin sich die Kurve krümmt. Wir nennen diesen Vektor die Hauptnormale und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{n}$.

$$\frac{dt}{ds} = k\mathfrak{n}.$$

Die Plangrösse $\mathfrak{F}$ lässt sich damit auf die Form bringen

$$\mathfrak{F} = v^3 t \frac{dt}{ds} = v^3 k t \mathfrak{n},$$

wo $t\mathfrak{n}$ als ein in der Schmiegungsebene liegendes Quadrat mit dem Flächeninhalt 1 dargestellt werden kann. Der numerische Wert von $\mathfrak{F}$ ist daher gleich

$$v^3 k.$$

Die „Torsion" der Kurve wird durch die Drehung der Schmiegungsebene gemessen, bezogen auf die Einheit der Bogenlänge. Sind

$$\mathfrak{F} \text{ und } \mathfrak{F} + d\mathfrak{F}$$

die Plangrössen in zwei um ds voneinander entfernten Punkten, so ist das äussere Produkt der beiden Plangrössen ein in ihrer Schnittlinie liegender Vektor, dessen numerischer Wert gleich dem Produkt ihrer numerischen Werte in den Sinus des Winkels zwischen ihnen ist.

Durch das Produkt ihrer numerischen Werte, das gleich $v^6 k^2$ zu setzen ist, dividiert, stellt also das äussere Produkt

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F} + d\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} d\mathfrak{F}$$

einen Vektor dar, dessen Grösse gleich dem unendlich kleinen Winkel zwischen den benachbarten Schmiegungsebenen ist.

Nun ist

$$\mathfrak{F} = v^3 t \frac{dt}{ds} \text{ also } \frac{d\mathfrak{F}}{ds} = 3v^2 \frac{dv}{ds} t \frac{dt}{ds} + v^3 \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds} + v^3 t \frac{d^2t}{ds^2}$$

$$= \frac{3}{v}\frac{dv}{ds}\mathfrak{F} + v^3 t \frac{d^2t}{ds^2},$$

da $\frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}$ verschwindet.

Mithin ist der gesuchte Vektor

$$\frac{\mathfrak{F} d\mathfrak{F}}{v^6 k^2} = \frac{ds}{k^2}\left(t \frac{dt}{ds}\right)\left(t \frac{d^2t}{ds^2}\right) = \frac{ds}{k^2}\left(t \frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\right)t.$$

Der unendlich kleine Winkel zwischen benachbarten Schmiegungsebenen ist also gleich

$$\frac{ds}{k^2}\left(t\,\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\right),$$

so dass wir auf die Einheit der Bogenlänge berechnet, den Drehungswinkel

$$\frac{1}{k^2}\left(t\,\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\right)$$

erhalten. Die Torsion wird dabei positiv gezählt, wenn $\mathfrak{F}(\mathfrak{F} + d\mathfrak{F})$ die Richtung von t hat, d. h. wenn die Drehung der Schmiegungsebene um den Richtungsvektor t mit wachsendem s im Sinne einer Rechtsschraube erfolgt.

Statt der Plangrösse $\mathfrak{F}$ könnte man natürlich auch ihre Ergänzung einführen und die Torsion durch die Richtungsänderung der Binormale definieren. Statt des äusseren Produktes der beiden benachbarten Plangrössen würde man es dann mit dem vektoriellen Produkt der beiden benachbarten Binormalen zu tun haben. Im wesentlichen würde das auf dasselbe hinauslaufen.

Zur Übung berechne man Krümmung und Torsion einer Schraubenlinie. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei aufeinander rechtwinklige gleichlange Vektoren, so ist eine Schraubenlinie durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = a\cos\alpha\cos t\,\mathfrak{a} + a\cos\alpha\sin t\,\mathfrak{b} + a\sin\alpha\,t\,\mathfrak{c}$$

gegeben. Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ kann aus den beiden Teilen

$$a\cos\alpha\cos t\,\mathfrak{a} + a\cos\alpha\sin t\,\mathfrak{b}$$

und $$a\sin\alpha\,t\,\mathfrak{c}$$

zusammengesetzt werden. Der erste Teil stellt einen Vektor dar, der von O aus abgetragen, zu den Punkten eines Kreises führt. t ist dabei der Winkel, den der Vektor mit der Anfangslage bei $t = 0$ bildet. Mit wachsendem t dreht er sich von der Anfangslage $a\cos\alpha\,\mathfrak{a}$ um 90 Grad in die Lage $a\cos\alpha\,\mathfrak{b}$ und in demselben Sinne weiter. Der zweite Teil $a\sin\alpha\,t\,\mathfrak{c}$ setzt sich senkrecht zur Kreisfläche daran und wächst proportional mit t, so dass der Endpunkt von $\mathfrak{r}$ sich auf einem Kreiszylinder bewegt. Wird der Zylindermantel in eine Ebene abgewickelt, so ergibt die Kurve eine gerade Linie mit der Abszisse $a\cos\alpha\,t$ und der Ordinate $a\sin\alpha\,t$, wenn die Länge der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gleich 1 genommen wird. Danach ist α der Steigungswinkel der Schraubenlinie.

Nun erhalten wir

	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	
$\mathfrak{r}$:	$a\cos\alpha\cos t$	$a\cos\alpha\sin t$	$a\sin\alpha\, t$	
$\mathfrak{v}=\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$:	$-a\cos\alpha\sin t$	$a\cos\alpha\cos t$	$a\sin\alpha$	$\mathfrak{v}.\mathfrak{v}=v^2=a^2$

daher

$\frac{\mathfrak{v}}{a}=\mathfrak{t}$:	$-\cos\alpha\sin t$	$\cos\alpha\cos t$	$\sin\alpha$	$v=\frac{ds}{dt}=a$
$\frac{d\mathfrak{t}}{ds}$:	$-\frac{\cos\alpha}{a}\cos t$	$-\frac{\cos\alpha}{a}\sin t$	0	$\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\frac{d\mathfrak{t}}{ds}=k^2 =\frac{\cos^2\alpha}{a^2}$
$\frac{d^2\mathfrak{t}}{ds^2}$:	$\frac{\cos\alpha}{a^2}\sin t$	$-\frac{\cos\alpha}{a^2}\cos t$	0	

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\,\frac{d^2\mathfrak{t}}{ds^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^3}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{t}\,\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\,\frac{d^2\mathfrak{t}}{ds^2}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{a^3}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

$$\frac{1}{k^2}\left(\mathfrak{t}\,\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\,\frac{d^2\mathfrak{t}}{ds^2}\right)=\frac{\sin\alpha}{a}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem wir eine Rechtsschraube oder Linksschraube haben.

§ 3. Krümmung und Torsion anders betrachtet.

Die Plangrösse

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt},$$

die der Schmiegungsebene parallel ist, können wir auch durch die Grenzlage definieren, der ein von drei Punkten der Kurve gebildetes Dreieck zustrebt, wenn die Punkte zusammenrücken. Es seien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ die Ortsvektoren dreier Punkte R, R_1, R_2 und t, t_1 t_2 die zugehörigen Werte der Veränderlichen. Dann ist, wenn man $\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}$ mit $\Delta_1\mathfrak{r}$, $\Delta_2\mathfrak{r}$ und t_1-t, t_2-t mit $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ bezeichnet, nach dem Taylorschen Satz

$$\Delta_1\mathfrak{r}=\mathfrak{v}\Delta_1 t+\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{\Delta_1 t^2}{2}+\dots$$

$$\Delta_2\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\Delta_2 t + \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{\Delta_2 t^2}{2} + \cdots$$

Die Plangrösse RR_1R_2 ist daher gleich

$$\frac{1}{2}\,\Delta_1\mathfrak{r}\,\Delta_2\mathfrak{r} = \frac{\Delta_1 t\,\Delta_2 t}{2}\left(\mathfrak{v} + \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{\Delta_1 t}{2} + \cdots\right)\left(\mathfrak{v} + \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{\Delta_2 t}{2} + \cdots\right.$$

$$= \frac{\Delta_1 t\,\Delta_2 t\,(\Delta_2 t - \Delta_1 t)}{4}\,\mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \cdots$$

Mithin $$\mathfrak{F} = \mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \text{limes}\,\frac{2\Delta_1\mathfrak{r}\Delta_2\mathfrak{r}}{\Delta_1 t\,\Delta_2 t\,(\Delta_2 t - \Delta_1 t)}\,.$$

Führen wir statt der Grössen $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $(\Delta_2 t - \Delta_1 t)$ die entsprechenden Seitenlängen $\Delta_1 s$, $\Delta_2 s$, $\Delta_3 s$ des Dreiecks ein, so erhalten wir, da

$$\lim\frac{\Delta_1 s}{\Delta_1 t} = \lim\frac{\Delta_2 s}{\Delta_2 t} = \lim\frac{\Delta_3 s}{\Delta_2 t - \Delta_1 t} = v$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \text{limes}\,\frac{2\Delta_1\mathfrak{r}\Delta_2\mathfrak{r}}{\Delta_1 s\,\Delta_2 s\,\Delta_3 s}\,v^3.$$

Mit anderen Worten, die Plangrösse

$$\frac{\mathfrak{F}}{v^3}$$

ist gleich dem Vierfachen des unendlich kleinen Dreiecks RR_1R_2 dividiert durch das Produkt der drei Dreiecksseiten. Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks (Fig. 21) und α der der Seite a gegenüberliegende Winkel, so ist, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich

$$a = 2\varrho\sin\alpha,$$

wo ϱ der Radius des umschriebenen Kreises ist. Mithin

$$abc = 2\varrho\sin\alpha\, bc$$

oder, da $\sin\alpha\, bc$ gleich der doppelten Fläche des Dreiecks ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{4\times\text{Dreiecksfläche}}{abc}\,.$$

Fig. 21.

Somit können wir den numerischen Wert von $\mathfrak{F}/v^3$ definieren als den Grenzwert, dem sich der reziproke Wert des Radius des dem

Dreieck RR_1R_2 umschriebenen Kreises nähert, wenn die drei Punkte zusammenrücken. Auf diesem Wege gelangen wir also auch zu dem schon oben abgeleiteten Ergebnis, dass der numerische Wert von $\mathfrak{F}$ gleich der dritten Potenz der Geschwindigkeit multipliziert mit der Krümmung ist.

Noch eine dritte Betrachtung führt zu demselben Ziel. Auf der Tangente der Kurve in R werde in der Richtung der wachsenden t die Länge 1 abgetragen bis zum Punkte T, so dass RT gleich dem Richtungsvektor t ist. Die Plangrösse RTR_1 ist dann gleich

$$\frac{1}{2}\mathfrak{t}\Delta_1\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\mathfrak{t}\left(\mathfrak{v}\Delta_1 t + \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\Delta_1 t^2}{2} + \cdots\right) = \mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\Delta_1 t^2}{4} + \cdots$$

Mithin
$$\frac{\mathfrak{F}}{v} = \mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \text{limes}\,\frac{2\mathfrak{t}\Delta_1\mathfrak{r}}{\Delta_1 t^2}$$

oder wenn wir wieder $\Delta_1 s$ einführen

$$\frac{\mathfrak{F}}{v^3} = \text{limes}\,\frac{2\mathfrak{t}\Delta_1\mathfrak{r}}{\Delta_1 s^2}.$$

Mit anderen Worten, die Plangrösse $\frac{\mathfrak{F}}{v^3}$ ist gleich dem Vierfachen der unendlich kleinen Plangrösse RTR_1, dividiert durch das Quadrat der Sehne RR_1. Da die Seite RT die Länge Eins hat, so ist die Fläche des Dreiecks gleich dem halben Abstand des Punktes R_1 von der Tangente RT. Denken wir uns nun einen Kreis gezogen, der durch R und R_1 läuft und RT zur Tangente hat, so ist bekanntlich RR_1^2 gleich dem Produkt des Durchmessers in den Abstand des Punktes R_1 von der Tangente RT (Fig. 22). Das Vierfache der Dreiecksfläche RR_1T dividiert durch das Quadrat von RR_1 ist demnach gleich dem reziproken Wert des Radius ϱ. D. h. der numerische Wert von $\mathfrak{F}/v^3$ ist gleich dem Grenzwert, dem sich $1/\varrho$ nähert, wenn R_1 und R zusammenrückt, oder der numerische Wert der Plangrösse

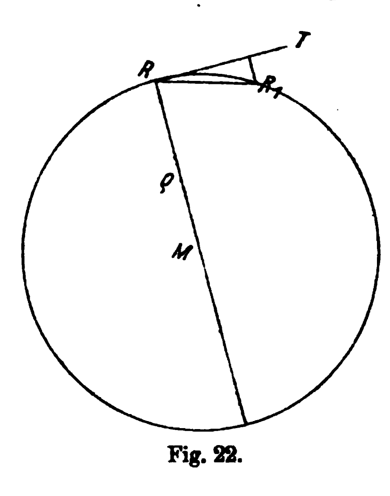


Fig. 22.

$\mathfrak{F}$ ist gleich der dritten Potenz der Geschwindigkeit, multipliziert mit der Krümmung. Wir wollen den numerischen Wert auf 1 reduzieren, indem wir die Plangrösse bilden

$$\frac{\mathfrak{F}}{kv^3}.$$

Um den Abstand des Punktes R_1 von der Schmiegungsebene im Punkte R zu berechnen, haben wir dann nur das äussere Produkt

$$\frac{\mathfrak{F}}{kv^3}\Delta_1\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{F}}{kv^3}\left(\mathfrak{v}\Delta_1 t + \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\Delta_1 t^2}{2} + \frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\frac{\Delta_1 t^3}{6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{F}}{kv^3}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\cdot\frac{\Delta_1 t^3}{6} + \cdots$$

zu bilden. Das Vorzeichen ergibt sich dabei positiv oder negativ, je nachdem R_1 auf der positiven oder negativen Seite der in die Schmiegungsebene gelegten Plangrösse $\mathfrak{F}$ liegt.

Multiplizieren wir die Gleichung mit 6 und dividieren wir durch $\Delta_1 t^3$, so wird das erste Glied der rechten Seite gleich

$$\frac{1}{kv^3}\left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^3}\right).$$

D. h. dies ist der Grenzwert, dem sich der sechsfache Abstand des Punktes R_1 von der Schmiegungsebene dividiert durch $\Delta_1 t^3$ nähert, wenn R_1 mit R zusammenrückt oder, wenn wir statt durch $\Delta_1 t^3$ durch die dritte Potenz von RR_1 dividieren und wieder bedenken, dass

$$\lim\frac{RR_1}{\Delta_1 t} = v \text{ ist:}$$

$$\text{limes}\, 6\frac{SR_1}{(RR_1)^3} = \frac{1}{kv^6}\left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\right),$$

wo S den Fusspunkt des von R_1 auf die Schmiegungsebene gefällten Lotes ist (Fig. 23) und SR_1 positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem R_1 auf der positiven oder negativen Seite der in der Schmiegungsebene gedachten Plangrösse $\mathfrak{F} = \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ liegt. RR_1 muss dabei dasselbe Vorzeichen wie $\Delta_1 t$ erhalten, weil $\lim\frac{RR_1}{\Delta_1 t}$ der numerische Wert von $\mathfrak{v}$ sein soll. Der Grenzwert ist durch seine Definition nur von der Gestalt der Kurve abhängig. Auch von dem

Sinn, indem wir die Kurve durchlaufen, ist er unabhängig. Denn wird er entgegengesetzt genommen, so ändert sich zwar auch der Drehungssinn der Plangrösse $\mathfrak{F} = \mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ und somit vertauschen sich die positive und negative Seite der Schmiegungsebene, so dass das Vorzeichen von SR_1 das entgegengesetzte wird.

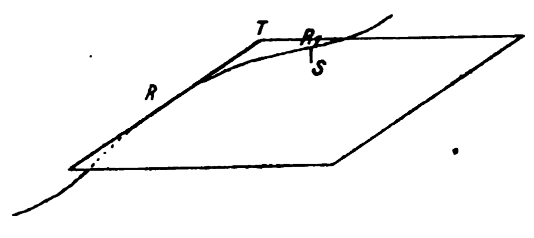


Fig. 23.

Aber zugleich wird auch das Vorzeichen von RR_1 das entgegengesetzte. Der Ausdruck

$$\frac{1}{k v^6}\left(\mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\right)$$

ist daher von der Wahl der Variabeln t ganz unabhängig. Man kann das auch unmittelbar einsehen. Denn sei τ eine neue Veränderliche und t eine Funktion von τ, so ist der Geschwindigkeitsvektor $\bar{\mathfrak{v}}$ in bezug auf die neue Veränderliche τ

$$\bar{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \mathfrak{v}\,\frac{dt}{d\tau} \text{ und } \bar{\mathfrak{v}}\,.\,\bar{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

und

$$\frac{d\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \mathfrak{v}\,\frac{d^2t}{d\tau^2}.$$

Daher

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{v}}\,\frac{d\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau} &= \mathfrak{v}\,\frac{dt}{d\tau}\left[\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \mathfrak{v}\,\frac{d^2t}{d\tau^2}\right]\\ &= \mathfrak{v}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3\\ &= \mathfrak{F}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3,\end{aligned}$$

ferner

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau^2} = \frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 + 3\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\frac{d^2t}{d\tau^2} + \mathfrak{v}\,\frac{d^3t}{d\tau^3},$$

somit

$$\bar{\mathfrak{v}}\frac{d\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau}\,\frac{d^2\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau^2} = \mathfrak{F}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3\frac{d^2\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau^2} = \mathfrak{F}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^6$$

und endlich

$$\frac{\bar{\mathfrak{v}}\dfrac{d\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau}\,\dfrac{d^2\bar{\mathfrak{v}}}{d\tau^2}}{(\bar{\mathfrak{v}}\,.\,\bar{\mathfrak{v}})^3} = \frac{\mathfrak{v}\dfrac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}}{(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})^3}.$$

Wählen wir für t die Bogenlänge, so erhalten wir

$$\operatorname{limes}\frac{6\,\mathrm{S}\,\mathrm{R}_1}{(\mathrm{R}\mathrm{R}_1)^3} = \frac{1}{k}\left(t\,\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\right).$$

Das ist das k-fache des Ausdrucks der oben für die Drehung der Schmiegungsebene, auf die Einheit der Bogenlänge berechnet, gefunden wurde.

Wir wollen diesen oben gefundenen Ausdruck, der die Dimension einer reziproken Länge hat, mit $1/\sigma$ bezeichnen

$$\varrho^2\left(t\,\frac{dt}{ds}\,\frac{d^2t}{ds^2}\right) = 1/\sigma$$

und wollen analog dem Krümmungsradius ($k = 1/\varrho$) σ den Torsionsradius nennen. Dabei ist nur zu beachten, dass ϱ nur positive Werte hat, σ dagegen je nach der Rechtsschrauben- oder Linksschraubenwindung der Kurve positiv oder negativ ist. Wir wollen den Zusammenhang des Torsionsradius mit dem Radius der Kugel untersuchen, die mit der Kurve in dem betrachteten Punkte eine vierfache Berührung hat. Wir legen zu dem Ende durch den Krümmungskreis der Kurve im Punkte R und durch den Punkt R_1 eine Kugel.

Der Ortsvektor des Krümmungsmittelpunktes ist

$$\mathfrak{r} + \varrho\mathfrak{n},$$

wo $\mathfrak{n} = \varrho\dfrac{dt}{ds}$ die Hauptnormale bezeichnet $[(\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{n}) = 1]$. Mit $\mathfrak{b}$ wollen wir die Binormale bezeichnen, deren Länge ebenfalls wie die der Hauptnormale gleich 1 angenommen wird

$$\mathfrak{b} = \varrho \;\Big|\; t\,\frac{dt}{ds}.$$

Der Ortsvektor, der nach dem Mittelpunkt M der Kugel führt, kann dann geschrieben werden:

$$\mathfrak{r} + \varrho\mathfrak{n} + l\mathfrak{b},$$

wo l den positiv oder negativ zu rechnenden Abstand des Mittelpunktes von der Schmiegungsebene bedeutet. l ist jetzt so zu bestimmen, dass der Vektor $M R_1$ die Länge $\sqrt{\varrho^2 + l^2}$ erhält. Wie oben schreiben wir $\Delta\mathfrak{r}$ für $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}$ und erhalten die Bedingungsgleichung

$$(\Delta\mathfrak{r} - \varrho\mathfrak{n} - l\mathfrak{b}) \,.\, (\Delta\mathfrak{r} - \varrho\mathfrak{n} - l\mathfrak{b}) = \varrho^2 + l^2.$$

Multipliziert man die linke Seite aus, so ist zu beachten, dass $\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{n} = \mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{b} = 1$ und dass $\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{b} = 0$ ist. Die Gleichung reduziert sich daher auf

$$\Delta\mathfrak{r}\,.\,\Delta\mathfrak{r} - 2\Delta\mathfrak{r}\,.\,(\varrho\mathfrak{n} + l\mathfrak{b}) = 0.$$

Für $\Delta\mathfrak{r}$ wird jetzt die Taylorsche Reihe

$$\Delta\mathfrak{r} = t\Delta s + \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \frac{d^2 t}{ds^2}\frac{\Delta s^3}{6} + \cdots$$

eingesetzt. Da $t\,.\,\mathfrak{n} = 0$, so ergibt sich

$$\Delta\mathfrak{r}\,.\,\Delta\mathfrak{r} = \Delta s^2 + \text{Glieder 4. Ordnung}$$

$$2\varrho\Delta\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{n} = \Delta s^2 + \frac{1}{3}\varrho^2\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2 t}{ds^2}\Delta s^3 + \cdots$$

$$2\Delta\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{b} = \frac{1}{3}\frac{d^2 t}{ds^2}\cdot\mathfrak{b}\Delta s^3 + \cdots$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2}\cdot\mathfrak{b} = \frac{d^2 t}{ds^2}\;\Big|\;\mathfrak{b} = \left(\frac{d^2 t}{ds^2}\,t\,\frac{dt}{ds}\right)\varrho = \frac{1}{\varrho\sigma} \quad \text{und}$$

$$\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\cdot\frac{dt}{ds}\right) = -\frac{d\varrho/ds}{\varrho^3}.$$

Mithin $$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} - \frac{l}{\varrho\sigma}\right)\Delta s^3 + \cdots = 0.$$

Für $\Delta s = 0$ wird demnach

$$l = \sigma\frac{d\varrho}{ds}$$

und damit wird das Quadrat des Kugelradius

$$R^2 = \varrho^2 + \sigma^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

§ 4. Integrationsregeln.

Aus der Differentiation eines Vektors, der als Funktion einer Veränderlichen betrachtet wird, folgt seine Integration. Wir ver-

stehen unter dem Integral eines gegebenen Vektors einen Vektor, dessen Differentialquotient gleich dem gegebenen Vektor ist. Das Integral ist nur bis auf einen willkürlichen konstanten additiven Vektor bestimmt, der bei der Differentiation wegfallen würde.

$$\int \mathfrak{r}(t)\,dt = \mathfrak{s}(t) + \mathfrak{a}.$$

Integriert man von einem bestimmten Werte t_0 an, so ist

$$\int_{t_0}^{t} \mathfrak{r}(t)\,dt = \mathfrak{s}(t) - \mathfrak{s}(t_0).$$

Die Masszahlen des Integrals von $\mathfrak{r}(t)$ in bezug auf irgendwelche festen Vektoren, aus denen $\mathfrak{r}(t)$ numerisch abgeleitet ist, sind demnach gleich den Integralen über die Masszahlen von $\mathfrak{r}(t)$. Die drei willkürlichen additiven Konstanten sind dann in dem konstanten additiven Vektor zusammengefasst. Für das Integral über einen Vektor gelten ähnliche Regeln wie über das Integral einer Funktion, die wir nur zu nennen nicht zu beweisen brauchen, da sich ihr Beweis unmittelbar daraus ergibt, dass in dem Integral über den Vektor nur die drei Integrale über die Masszahlen zusammengefasst sind.

Ein konstanter Zahlenfaktor kann aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\int a\mathfrak{r}\,dt = a\int \mathfrak{r}\,dt.$$

Auf das Produkt einer skalaren Funktion $f(t)$ mit einem Vektor $\mathfrak{r}(t)$ kann man in zweifacher Weise die Formel der partiellen Integration anwenden

$$\int f(t)\,\mathfrak{r}(t)\,dt = f(t)\,\mathfrak{s}(t) - \int f'(t)\,\mathfrak{s}(t)\,dt,$$

wo $\mathfrak{s}(t)$ ein Integral von $\mathfrak{r}(t)$ ist und

$$\int f(t)\,\mathfrak{r}(t)\,dt = F(t)\,\mathfrak{r}(t) - \int F(t)\,\mathfrak{r}'(t)\,dt,$$

wo $F(t)$ ein Integral von $f(t)$ ist. Ist

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \mathfrak{r},$$

so schreiben wir auch $d\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\,dt$ und im Integral

$$\int f(t)\,\mathfrak{r}(t)\,dt = \int f(t)\,d\mathfrak{s}.$$

Das Integral $\int f(t)\,d\mathfrak{s}$

erstreckt sich also, wenn wir uns $\mathfrak{r}(t)$ von einem festen Punkte O aus abgetragen denken, über die Kurve, die der Endpunkt von $\mathfrak{r}$ beschreibt, wenn t seine Werte durchläuft.

Ist $\mathfrak{a}$ ein von t unabhängiger Vektor, so ist

$$\int (\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{r})\,dt = \mathfrak{a}\,.\int \mathfrak{r}\,dt,$$

und

$$\int (\mathfrak{a}\times\mathfrak{r})\,dt = \mathfrak{a}\times\int \mathfrak{r}\,dt.$$

Ist $\mathfrak{a}$ ebenso wie $\mathfrak{r}$ von t abhängig, so kann man die Formel der partiellen Integration anwenden

$$\int\left(\mathfrak{a}\,.\,\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)dt = \int \mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{s} - \int\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\,.\,\mathfrak{s}\right)dt,$$

$$\int\left(\mathfrak{a}\times\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)dt = \int \mathfrak{a}\times d\mathfrak{s} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{s} - \int\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\times\mathfrak{s}\right)dt.$$

Zum Beweise braucht man nur an die entsprechenden Formeln der Masszahlen zu denken und zu beachten, dass der Wert von $\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{s}$ und die Masszahlen von $\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{s}$ sowohl in den Masszahlen von $\mathfrak{a}$ wie in denen von $d\mathfrak{s}$ linear sind.

§ 5. Anwendung auf die Bewegung eines Massenpunktes um ein festes Zentrum.

Ein Punkt R mit der Trägheit m bewege sich unter dem Einfluss einer von einem festen Zentrum O ausgehenden anziehenden oder abstossenden Kraft, die eine Funktion seiner Entfernung von O ist.

Wir denken uns seinen Ort durch einen von O aus abgetragenen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt, dessen Abhängigkeit von der Zeit t zu ermitteln ist.

Der numerische Wert von $\mathfrak{r}$ werde mit r bezeichnet ($\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{r} = r^2$) und der Vektor $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ mit $\mathfrak{e}$. Die Grösse der Kraft sei f(r), wobei ein positiver Wert von f(r) eine Abstossung, ein negativer eine Anziehung bedeuten soll. Der Kraftvektor ist dann gleich

$$f(r)\,\mathfrak{e}$$

und die Differentialgleichung der Bewegung lautet als Vektorgleichung geschrieben

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = f(r)\,\mathfrak{e},$$

wo $\ddot{\mathfrak{r}}$ die zweite Ableitung von $\mathfrak{r}$ nach der Zeit bedeutet. Die äussere Multiplikation mit $\mathfrak{r}$ liefert, da $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = 0$ ist,

$$\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}} = 0.$$

Die Plangrösse $\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}$ ist aber der Differentialquotient der Plangrösse $\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}$. Daher ergibt sich durch Integration $\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}$ gleich einer konstanten Plangrösse $\mathfrak{C}$ oder

$$\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{C}\,dt.$$

$\frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}}{2}$ ist die Plangrösse, die bei der Bewegung des Massenpunktes von dem Vektor OR in dem Zeitteilchen dt überstrichen wird, in dem Umlaufsinn genommen, der der Reihenfolge $\mathfrak{r}$, $\dot{\mathfrak{r}}$ entspricht. In der Zeit t_1 bis t_2 wird daher die Plangrösse

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{C}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(t_2 - t_1)$$

überstrichen. Mit anderen Worten, die Bewegung geht in einer bestimmten zu $\mathfrak{C}$ parallelen Ebene vor sich und in gleichen Zeiten werden gleiche Flächen von $\mathfrak{r}$ überstrichen. Die in der Zeiteinheit überstrichene Fläche ist gleich $\frac{1}{2}c$, wenn c den numerischen Wert der Plangrösse $\mathfrak{C}$ bedeutet.

Die Plangrösse $\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}$ lässt sich auch schreiben in der Form $r^2\mathfrak{e}\,d\mathfrak{e}$. Denn

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{e},$$

daher

$$d\mathfrak{r} = r\,d\mathfrak{e} + dr\,\mathfrak{e}$$

und somit

$$\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r} = r\mathfrak{e}(r\,d\mathfrak{e} + dr\,\mathfrak{e}) = r^2\mathfrak{e}\,d\mathfrak{e}.$$

Es ist also

$$\mathfrak{e}\,d\mathfrak{e} = \frac{dt}{r^2}\,\mathfrak{C},$$

oder, wenn wir die Ergänzung von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{c}$ bezeichnen

$$\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}} = \frac{1}{r^2}\,\mathfrak{c}.$$

Da $\mathfrak{e}.\mathfrak{e} = 1$, also $\mathfrak{e}.\dot{\mathfrak{e}} = 0$, so steht $\dot{\mathfrak{e}}$ senkrecht auf $\mathfrak{e}$. Es ist daher

$$\mathfrak{c}\times\mathfrak{e} = r^2(\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}})\times\mathfrak{e} = r^2\dot{\mathfrak{e}}.$$

Multiplizieren wir die Ausgangsgleichung auf beiden Seiten vektoriell mit $\mathfrak{c}$, so nimmt sie demnach die Form an

$$m\ddot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{c} = -r^2 f(r)\dot{\mathfrak{e}}.$$

Diese Form ist der ersten äquivalent; denn sie geht durch vektorielle Multiplikation mit $-\mathfrak{c}/c^2$ wieder in die erste Form über.

Für den Fall der Anziehung oder Abstossung proportional dem umgekehrten Quadrat der Entfernung

$$f(r) = \frac{\varkappa}{r^2}$$

ist diese zweite Form der Differentialgleichung der Bewegung der ersten vorzuziehen. Denn in diesem Fall wird

$$m\ddot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{c} = -\varkappa\dot{\mathfrak{e}} \text{ oder } \frac{m}{\varkappa}\mathfrak{c} \times \ddot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{e}}.$$

Beide Seiten sind jetzt Differentialquotienten, und wenn man integriert, so ergibt sich die Vektorgleichung

$$\frac{m}{\varkappa}\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a} + \mathfrak{e},$$

wo $\mathfrak{a}$ einen konstanten Vektor bedeutet, und nun durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}$

$$-\frac{m}{\varkappa}c^2 = \mathfrak{a}.\mathfrak{r} + r,$$

$$[\text{denn } (\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}}).\mathfrak{r} = (\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{r}).\mathfrak{c} = -\mathfrak{c}.\mathfrak{c} = -c^2].$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die vollständige Darstellung der Bewegung. Die letzte Gleichung enthält die Gleichung der Bahn in Polarkoordinaten, die vorhergehende Gleichung gibt uns die Gestalt des Hodographen.

Bezeichnen wir nämlich die Länge des Vektors $\mathfrak{a}$ mit ε und den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ mit φ, so kann man die Bahngleichung in der Form schreiben

$$-\frac{m}{\varkappa}c^2 = \varepsilon r \cos\varphi + r,$$

oder

$$r = \frac{-mc^2/\varkappa}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Das ist für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, für $\varepsilon > 1$ ein Hyperbelast. Der Brennpunkt liegt in dem festen Zentrum O, und die Richtung

$\varphi = 0$ (d. i. die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$) liefert die kleinste Entfernung. Da r notwendig positiv ist und $1 + \varepsilon \cos \varphi$ im Falle der Ellipse ($\varepsilon < 1$) auch positiv ist, so muss $-\mathrm{m c}^2/\varkappa$ positiv, mithin $\varkappa$ negativ sein. Die elliptische Bahn kann daher nur bei einer anziehenden Kraft vorkommen. Die Summe der kleinsten und grössten Entfernung ergibt den Wert der grossen Achse 2a

$$2\mathrm{a} = -\mathrm{m c}^2/\varkappa \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right),$$

$$\mathrm{a} = \frac{-\mathrm{m c}^2/\varkappa}{1-\varepsilon^2},$$

womit wir die Bahngleichung auch in der Form

$$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

schreiben können.

Wir wollen uns ein Bild der Bahn zeichnen, das im Verhältnis 1 : a verkleinert ist. Die grosse Achse wird dann gleich 2 und die Entfernung der beiden Brennpunkte OO′ ist gleich 2ε. Der Vektor O′M, der von dem anderen Brennpunkt O′ zum Mittelpunkt M führt, ist gleich $\mathfrak{a}$. Der Vektor OS ist gleich $\mathfrak{r}/\mathrm{a}$ (Fig. 24).

Die Gleichung $\quad \frac{\mathrm{m}}{\varkappa}\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a} + \mathfrak{e},$

die uns den Hodographen liefert, können wir durch Erweiterung der Figur 24 darstellen. Zu dem Ende denken wir uns O′ als das feste Zentrum und schlagen um M mit der Längeneinheit einen Kreis. Parallel zu dem Vector OS $= \mathfrak{r}/\mathrm{a}$ ziehen wir den Radius MH, der dann also den Vektor $\mathfrak{e}$ darstellt. Der Vektor O′H liefert somit $\mathfrak{a} + \mathfrak{e}$, das ist $\frac{\mathrm{m}}{\varkappa}\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}}$. Denken wir uns in Figur 25 die Bahnebene von derjenigen Seite betrachtet, nach der $\mathfrak{c}$ hinzeigt, so dass also die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\dot{\mathfrak{r}}$ sich entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, so wird der Vektor $\frac{\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}}}{\mathrm{c}}$ gleich dem um 90 Grad weiter gedrehten Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ sein. Oder wenn man den Vektor O′H entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um 90 Grad weiter dreht, so erhält man

$$\frac{\mathrm{m}}{\varkappa}\frac{\mathfrak{c}}{\mathrm{c}} \times (\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}}) = -\frac{\mathrm{m}}{\varkappa}(\mathfrak{c} \times \dot{\mathfrak{r}}) \times \frac{\mathfrak{c}}{\mathrm{c}} = -\frac{\mathrm{m c}}{\varkappa}\dot{\mathfrak{r}}.$$

Da $-\frac{mc}{\varkappa}$ positiv ist, so wird der um 90 Grad im Sinne des Umlaufs gedrehte Vektor O′H die Richtung von $\dot{\mathfrak{r}}$ anzeigen und seine Länge wird der Länge von $\dot{\mathfrak{r}}$ proportional. Wir können uns den Maßstab für die Darstellung der Geschwindigkeit so gewählt denken, dass die Längeneinheit der Figur 25 die Geschwindigkeit

$$-\frac{\varkappa}{mc}$$

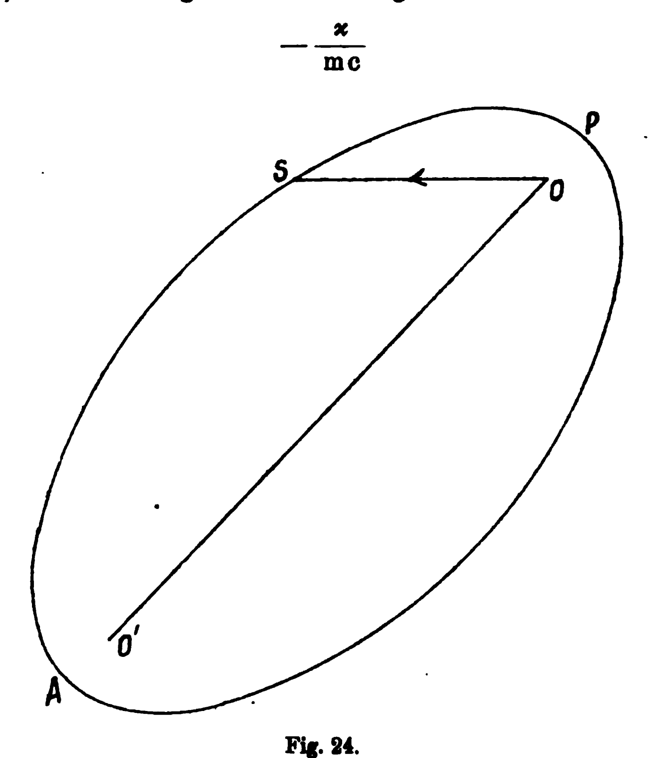


Fig. 24.

darstellt, dann lässt O′H durch Grösse und Richtung überblicken, welche Geschwindigkeit jedem Punkte der Bahn zukommt. Dass O′H auf $\dot{\mathfrak{r}}$ senkrecht steht, hätte man auch aus der bekannten Eigenschaft der Ellipse schliessen können, dass die Tangente in S den Kreis über der grossen Achse in den Fusspunkten der von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Lote schneidet. Dass SH auf O′H senkrecht, ist nichts anderes als der Inhalt der obigen Gleichung

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{a}} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

denn der Vektor HS ist gleich der Differenz von O'S und O'H gleich

$$2\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{a}} - (\mathfrak{e} + \mathfrak{a}),$$

oder

$$\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{a}} - \mathfrak{e},$$

dessen skalares Produkt mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{e}$ ergibt

$$\mathfrak{a}.\mathfrak{a} - \mathfrak{e}.\mathfrak{e} + \\ + \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{a}}(\mathfrak{e}.\mathfrak{a}) + \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{a}}(\mathfrak{e}.\mathfrak{e}),$$

oder

$$\varepsilon^2 - 1 + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}}\varepsilon\cos\varphi + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}},$$

was nach der obigen Gleichung verschwindet.

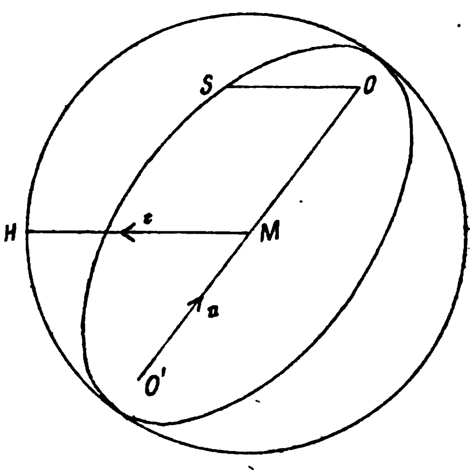


Fig. 25.

§ 6. Flächenintegrale und Raumintegrale.

Ähnlich wie wir oben eine Raumkurve in vektorielle Elemente zerlegt dachten und einen Vektor durch ein Integral

$$\int \mathrm{f}\, d\mathfrak{r}$$

definierten, wo $d\mathfrak{r}$ ein unendlich kleines Element der Raumkurve und f eine skalare Funktion des Ortes war, so können wir uns auch die Oberfläche oder einen Teil der Oberfläche eines Körpers in unendlich kleine Plangrössen zerlegt denken und eine Plangrösse durch ein Integral

$$\int \mathrm{f}\, d\mathfrak{F}$$

definieren, wo $d\mathfrak{F}$ eine unendlich kleine Plangrösse und f eine Ortsfunktion bedeutet. Wir wollen uns dabei den Umlaufsinn der Plangrössen $d\mathfrak{F}$ so gewählt denken, dass das Innere des Körpers auf seiner positiven Seite liegt.

Um diese Plangrösse auf drei gegebene Plangrössen zu beziehen, wird man drei zweifache Integrale auszuwerten haben. Seien z. B. $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei aufeinander rechtwinklige Vektoren von der Länge

Eins und x, y, z die Masszahlen eines Ortsvektors $\mathfrak{r}$ in bezug auf $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, so wird f eine Funktion von x, y, z, die sich für die Punkte der Oberfläche des Körpers als Funktion irgend zweier dieser drei Grössen schreiben lässt. Die Plangrösse $d\mathfrak{F}$ lässt sich numerisch aus $|\,\mathfrak{i}, |\,\mathfrak{j}, |\,\mathfrak{k}$ ableiten

$$d\mathfrak{F} = dp\,|\,\mathfrak{i} + dq\,|\,\mathfrak{j} + dr\,|\,\mathfrak{k},$$

wo $$d\mathfrak{F}\mathfrak{i} = dp, \quad d\mathfrak{F}\mathfrak{j} = dq, \quad d\mathfrak{F}\mathfrak{k} = dr$$

die Masszahlen der Projektionen von $\mathfrak{F}$ auf die drei Koordinaten Ebenen sind. Die zweifachen Integrale

$$\int f\,dp, \quad \int f\,dq, \quad \int f\,dr,$$

liefern dann die drei Masszahlen von

$$\int f\,d\mathfrak{F}.$$

Bei der Ausrechnung ist z. B. dp gleich $+\,dy\,dz$, oder $-\,dy\,dz$ zu setzen, je nachdem $d\mathfrak{F}\mathfrak{i}$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem $\mathfrak{i}$ nach der positiven oder nach der negativen Seite von $d\mathfrak{F}$ gerichtet ist.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die Plangrösse

$$\int d\mathfrak{F},$$

die wir erhalten, wenn wir die Ortsfunktion f gleich 1 setzen, sich auf Null reduzieren muss, sobald das Integral über die ganze Oberfläche eines Körpers erstreckt wird. Jede der drei Masszahlen

$$\int dp, \quad \int dq, \quad \int dr,$$

muss Null werden, weil zu jedem Element der Oberfläche, das z. B. für die erste Masszahl ein dp liefert, ein zweites angegeben werden kann, das $-\,dp$ liefert.

Zu den Integralen

$$\int f\,d\mathfrak{r} \text{ und } \int f\,d\mathfrak{F}$$

tritt endlich drittens das dreifache Integral, das über einen beliebigen Teil des Raumes erstreckt wird,

$$\int f\,d\tau,$$

wo $d\tau$ die Masszahl eines unendlich kleinen Raumteils bezeichnet. Wir können uns das Raumteilchen überall rechts gewunden vorstellen, so dass $d\tau$ positiv angenommen werden kann.

Die drei Integrale

$$\int f\,d\mathfrak{r},\ \int f\,d\mathfrak{F},\ \int f\,d\tau$$

können nun auch für den Fall betrachtet werden, dass statt der skalaren Funktion f, ein Vektor oder eine Plangrösse eingesetzt und die Multiplikation mit $d\mathfrak{r}$ oder $d\mathfrak{F}$ als skalares oder äusseres oder vektorielles Produkt definiert wird. Der Vektor oder die Plangrösse, die für f eintreten, sind dabei als Funktionen des Ortes aufgefasst, an dem sich das Element $d\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{F}$ oder $d\tau$ des Integrals befindet.

§ 7. Vektorfelder und Plangrössenfelder.

Ein räumliches Gebiet, in dessen Punkten ein Vektor definiert ist, heisst ein Vektorfeld; in dem gleichen Sinne wollen wir von einem Plangrössenfeld sprechen. Ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, der von einem festen Punkt O zu einem Punkt R des betrachteten Gebietes führt, so wollen wir eine skalare Funktion f, die als Ortsfunktion für das Gebiet definiert ist mit $f(\mathfrak{r})$ bezeichnen und ebenso einen Vektor $\mathfrak{p}$, der als Funktion des Ortes gegeben, ein Vektorfeld definiert, mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ oder eine Plangrösse $\mathfrak{P}$, die ein Plangrössenfeld definiert mit $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$.

Eine Ortsfunktion $f(\mathfrak{r})$ führt durch Differentiation auf ein gewisses Vektorfeld. Alle Punkte des Raumes in der Nachbarschaft eines Punktes R, in denen $f(\mathfrak{r})$ denselben Wert hat wie in R, bilden eine Fläche, von der wir voraussetzen, dass sie in R eine Tangentialebene besitzt.

Wir denken uns nun den Vektor $\mathfrak{r}$ aus drei voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch die Masszahlen x, y, z abgeleitet

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}.$$

Dann wird f eine Funktion von x, y, z, für die

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

was wir als das skalare Produkt der beiden Vektoren

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{a}^* + \frac{\partial f}{\partial y}\mathfrak{b}^* + \frac{\partial f}{d z}\mathfrak{c}^*$$

und

$$d\mathfrak{r} = dx\mathfrak{a} + dy\mathfrak{b} + dz\mathfrak{c}$$

auffassen können, unter $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ das zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ reziproke System verstanden

$$\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \; \mathfrak{b}^* = \frac{\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \; \mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.$$

D. h. es ist

$$df = \mathfrak{g} . d\mathfrak{r}.$$

Dieser Vektor $\mathfrak{g}$ heisst der Gradient der skalaren Funktion f und definiert ein Vektorfeld. Er steht senkrecht auf der Fläche $f = \text{const.}$, die durch R geht; denn df wird Null, wenn $d\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{g}$ senkrecht steht. Gibt man $d\mathfrak{r}$ die Richtung von $\mathfrak{g}$ und die Länge dn also

$$d\mathfrak{r} = \frac{dn\, \mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g}}}$$

so wird

$$df = dn \sqrt{\mathfrak{g} . \mathfrak{g}}.$$

D. h. der numerische Wert des Gradienten wird durch $\frac{df}{dn}$ gemessen.

Durch die Gleichung

$$df = \mathfrak{g} . d\mathfrak{r},$$

der der Vektor $\mathfrak{g}$ genügt, ist also seine Unabhängigkeit von den gewählten Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ dargetan, durch die er zunächst definiert wurde. Denn aus dieser Gleichung ergibt sich sowohl seine Richtung wie seine Grösse, ohne Beziehung auf die gewählten Einheitsvektoren. Mit anderen Worten, wenn wir statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ irgend drei andere voneinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ wählen würden, aus denen wir den Vektor $\mathfrak{r}$ numerisch ableiten

$$\mathfrak{r} = \xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} + \zeta\mathfrak{r},$$

so dass f jetzt als Funktion von ξ, η, ζ betrachtet wird und

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta$$

ist, so ist derselbe Vektor $\mathfrak{g}$ in der Form

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial f}{d\xi}\mathfrak{p}^* + \frac{\partial f}{\partial \eta}\mathfrak{q}^* + \frac{\partial f}{d\zeta}\mathfrak{r}^*$$

darstellbar, unter $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*, \mathfrak{r}^*$ wieder das zu $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ reziproke System verstanden.

Man hat für diese Ableitung des Vektors $\mathfrak{g}$ aus der Ortsfunktion f auch die Bezeichnung

$$\mathfrak{g} = \nabla f$$

eingeführt, wo ∇ einen vektoriellen Operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{a}^* + \frac{\partial}{d y}\mathfrak{b}^* + \frac{\partial}{d z}\mathfrak{c}^*$$

bezeichnet, der auf f angewendet wird. Der Operator wird nach dem hebräischen Wort „Nabla" gesprochen[1]). Bei Einführung neuer, voneinander unabhängiger Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ erhält also der Operator die Form

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{p}^* + \frac{\partial}{\partial \eta}\mathfrak{q}^* + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathfrak{r}^* .$$

Wir können demnach von ∇, wie von einem Vektor reden, dessen Masszahlen in bezug auf $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ die Differenziationszeichen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ sind, wenn x, y, z die Masszahlen in bezug auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezeichnen. Beim Übergang zu neuen Koordinaten geht der Ausdruck für ∇

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{a}^* + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{b}^* + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{c}^*$$

in

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{p}^* + \frac{\partial}{\partial \eta}\mathfrak{q}^* + \frac{d}{d \zeta}\mathfrak{r}^*$$

über.

Beziehen sich x, y, z auf ein zu sich selbst reziprokes System $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, so ist natürlich

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k},$$

da hier der Unterschied gegen das reziproke System wegfällt.

Wenn ein Vektorfeld $\mathfrak{g}$ gegeben ist, das aus einer skalaren Funktion f nach der Formel

$$\mathfrak{g} = \nabla f$$

abgeleitet werden kann, so heisst $-f$ die Potentialfunktion des

[1]) „Nabla" ist die Bezeichnung für ein harfenähnliches musikalisches Instrument, dessen Form durch das Zeichen ∇ dargestellt ist.

Vektorfeldes. Der Name stammt aus der Mechanik. Stellt nämlich $\mathfrak{g}$ die Kraft vor, die ein Massenpunkt an der betreffenden Stelle des Feldes erfährt, so können wir dem Massenpunkt eine „potentielle Energie“ oder eine Energie der Lage zuschreiben, die bei seiner Verschiebung um $d\mathfrak{r}$ die Änderung

$$-\mathfrak{g}.d\mathfrak{r} = -df$$

erfährt.

Verschiebt man den Massenpunkt längs einer Kurve von einem Punkte A bis zu einem anderen Punkt P, so ist

$$f_A - f_P = \int_A^P -\mathfrak{g}.d\mathfrak{r}$$

die Gesamtänderung der potentiellen Energie. Sie ist, wie die linke Seite der Gleichung zeigt, nur von den Ortslagen A und P, nicht von dem Wege, längs dem der Punkt verschoben wird, abhängig. Halten wir den Punkt A fest, während wir P als veränderlich betrachten, so sehen wir, dass eine Zunahme von $-f$ bei der Ortsänderung uns die Energiemenge angibt, die wir dem Massenpunkt zuführen müssen, um die betreffende Verschiebung im Kraftfelde zu bewirken, eine Abnahme dagegen die Energiemenge, die wir ihm entziehen müssen. Abgesehen von einer beliebigen hinzutretenden Konstante misst demnach $-f$ die „potentielle Energie“, d. h. die Energie der Lage, die dem Massenpunkt innewohnt, und wird daher Potentialfunktion oder auch schlechthin Potential genannt.

Wenden wir den Operator ∇ auf ein Vektorfeld $\mathfrak{p}$ an in der Art, dass wir das äussere Produkt

$$\nabla \mathfrak{p}$$

bilden, so erhalten wir ein Plangrössenfeld. Sind u, v, w die Masszahlen von $\mathfrak{p}$ in bezug auf das reziproke System $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, so ist das äussere Produkt

$$\nabla \mathfrak{p} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^* + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathfrak{c}^*\mathfrak{a}^* + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*$$

oder das vektorielle Produkt gleich der Ergänzung davon

$$\nabla \times \mathfrak{p} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{d z}\right)\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{abc}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{abc}} + \left(\frac{\partial v}{d x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{abc}}.$$

Diese Plangrösse muss ebenso wie der oben besprochene Vektor ∇f von dem zugrunde gelegten System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, auf das sich die Veränderlichen x, y, z beziehen, unabhängig sein, wie sogleich näher ausgeführt werden wird.

Wenden wir endlich den Operator ∇ auf ein Plangrössenfeld $\mathfrak{F}$ an, indem wir das äussere Produkt

$$\nabla \mathfrak{F}$$

bilden, so erhalten wir wieder eine skalare Funktion. Sind p, q, r die Masszahlen der Ergänzung von $\mathfrak{F}$ in bezug auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, so wird

$$\nabla \mathfrak{F} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}.$$



Wieder ist diese skalare Funktion, wie wir sogleich näher erörtern werden, von den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ unabhängig.

Ausser dem Operator ∇ wollen wir auch seine Ergänzung

$$| \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

einführen. Aus demselben Grunde, aus dem wir von ∇ als einem Vektor reden, reden wir von der Ergänzung $| \nabla$ als von einer Plangrösse. Auf eine skalare Funktion f, auf ein Vektorfeld $\mathfrak{p}$ und auf eine Plangrösse $\mathfrak{F}$ angewendet, ergibt der Operator $| \nabla$ im ersten Falle ein Plangrössenfeld, im zweiten eine skalare Funktion, im dritten ein Vektorfeld

$$| (f \nabla) = f \,|\, \nabla = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

$$\nabla . \mathfrak{p} = \mathfrak{p} . \nabla = \mathfrak{p} \,|\, \nabla = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\mathfrak{F} \,|\, \nabla = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathfrak{a} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathfrak{b} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathfrak{c}.$$

Hier sind p, q, r die Masszahlen von $\mathfrak{p}$ in bezug auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und u, v, w die Masszahlen von $\mathfrak{F}$ in bezug auf $\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{c}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Alle drei Grössen sind, wie wir sogleich näher erörtern werden, von den Einheitsvektoren unabhängig.

§ 8. Die Umwandlung von Flächenintegralen in Raumintegrale.

Die Begrenzung eines Körpers werde in Elemente $d\mathfrak{S}$ von Plangrössen zerlegt gedacht, deren Umlaufsinn so genommen sein soll, dass das Innere des Körpers auf ihrer positiven Seite liegt. Der Körper liege im Inneren des Gebietes, in dem $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{J}$ definiert sind, und es werde ein Integral über seine Begrenzung erstreckt, indem erstens über das Produkt $\mathfrak{f}d\mathfrak{S}$, zweitens über das äussere Produkt $\mathfrak{p}d\mathfrak{S}$ und drittens über das äussere Produkt $\mathfrak{J}d\mathfrak{S}$ integriert wird.

Dann gelten die folgenden drei Formeln

1. $$\int \mathfrak{f}\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{f} \mid \nabla\, d\tau = 0$$

2. $$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{p} \mid \nabla\, d\tau = 0$$

3. $$\int \mathfrak{J}\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{J} \mid \nabla\, d\tau = 0,$$

wo in dem zweiten Gliede $d\tau$ ein positives Volumelement bedeutet und über das Volumen des Körpers zu integrieren ist.

Zum Beweise denken wir uns den Körper in Stücke zerbrochen, aber die Stücke genau so wieder zusammengefügt, wie sie ursprünglich sassen. Jedes der Integrale kann man dann ersetzen durch die Summe der Integrale über die einzelnen Stücke. Von den Raumintegralen ist das ohne weiteres klar. Dass es auch für die Oberflächenintegrale richtig ist, folgt daraus, dass jeder Teil der Begrenzung eines Stückes, der in das Innere des Körpers fällt, doppelt vorkommt, als Grenzteil zweier Stücke, die in ihm aneinander stossen. Für das eine Stück muss aber sein Umlaufsinn der entgegengesetzte sein wie für das andere. Infolgedessen heben sich alle die entsprechenden Teile der Oberflächenintegrale gegeneinander fort und es bleiben nur die Teile der Begrenzungen der Stücke übrig, die zugleich die ursprüngliche Begrenzung des Körpers bilden.

Es habe nun eines der Stücke parallelepipedische Form. Die Seitenflächen seien den Koordinatenebenen parallel und die Kanten haben die Längen Δx, Δy, Δz, die wir sehr klein voraussetzen wollen.

Die eine Ecke habe die Koordinaten x, y, z, die Koordinaten der anderen Ecken gehen aus x, y, z hervor durch Vergrösserung um Δx, Δy, Δz.

Dann ist in den Seitenflächen, die parallel der yz-Ebene liegen

$$d\mathfrak{S} = dy\,dz\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \text{ und } d\mathfrak{S} = -dy\,dz\,\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

wo das positive Zeichen der Seitenfläche mit der kleineren x-Koordinate entspricht. Für diese beiden Grenzflächen bekommen wir daher

$$\int f(x, y, z)\,dy\,dz\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \text{ und } -\int f(x+\varDelta x, y, z)\,dy\,dz\,\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

mithin bis auf Glieder höherer Ordnung

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\varDelta x \varDelta y \varDelta z\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Die Beiträge von den Seitenflächen parallel zur xz- und parallel zur xy-Ebene ergeben sich durch zyklische Vertauschung, und somit ergeben alle Seitenflächen zusammen bis auf Grössen höherer Ordnung die Plangrösse

$$-f \mid \nabla \varDelta x \varDelta y \varDelta z\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Das Raumintegral $\int f \mid \nabla d\tau$ ergibt über dasselbe Stück erstreckt bis auf Grössen höherer Ordnung den Beitrag

$$+f \mid \nabla \varDelta x \varDelta y \varDelta z\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Zusammen wird also der Beitrag beider Integrale von höherer Ordnung als $\varDelta x \varDelta y \varDelta z$. Daraus folgt, dass die Summe beider Integrale über ein Parallelepipedon, dessen Seitenflächen den Koordinatenebenen parallel sind, verschwinden muss. Denn wenn man das Parallelepipedon in n^3 gleiche, ihm ähnliche Parallelepipeda zerlegt, so liefert jedes von ihnen einen Beitrag, der mit wachsendem n klein gegen $1/n^3$ wird. Mithin kann der Gesamtwert nicht von Null verschieden sein. Mit dem Beweise für jedes solche parallelepipedische Gebiet ist nun auch die Richtigkeit der Formel für einen beliebig begrenzten Körper bewiesen. Denn wenn wir sein Inneres in hinreichend kleine parallelepipedische Stücke aufbrechen, so geben die an der Grenze übrigbleibenden nicht parallelepipedischen Teile zusammen nur noch beliebig kleine Beiträge der beiden Integrale ab. Für das dreifache Integral folgt dies unmittelbar aus der Kleinheit des Gesammtvolumens dieser Teile. Für das Oberflächenintegral folgt es daraus, dass für einen hinreichend kleinen Brocken bis auf Glieder höherer Ordnung $\int f d\mathfrak{S} = f\int d\mathfrak{S}$ ist. Aber nun ist, wie oben schon bemerkt, für die Oberfläche eines Körpers $\int d\mathfrak{S} = 0$. Infolgedessen ist der Gesammtbeitrag von allen diesen Brocken von der Ordnung ihres Volumens, d. h. beliebig klein.

Ganz analog wie in dem Falle 1 wird der Beweis auch im Falle 2 und 3 geführt. Wir brauchen nur wieder ein Parallelepipedon von den Kantenlängen Δx, Δy, Δz zu betrachten. In dem Falle 2 liefert $\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S}$ für die zur x-Achse senkrechten Seitenflächen

$$\int \mathfrak{p}(x, y, z)\, dx\, dy\, \mathfrak{bc} - \int \mathfrak{p}(x + \Delta x, y, z)\, dx\, dy\, \mathfrak{bc},$$

d. i. bis auf Glieder höherer Ordnung

$$-\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{bc} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathfrak{a} + \frac{\partial q}{\partial x}\mathfrak{b} + \frac{\partial r}{\partial x}\mathfrak{c}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{bc}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{abc}.$$

Somit liefert die ganze Begrenzung des Parallelepidedons bis auf Grössen höherer Ordnung

$$-\mathfrak{p} \mid \nabla \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{abc},$$

was sich wieder gegen den Beitrag des Raumintegrals weghebt.

Im Falle 3 liefert $\int \mathfrak{F}\, d\mathfrak{S}$ für die zur yz-Ebene parallelen Seitenflächen

$$\int \mathfrak{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, \mathfrak{bc} - \int \mathfrak{F}(x + \Delta x, y, z)\, dx\, dy\, \mathfrak{bc},$$

d. i. bis auf Glieder höherer Ordnung

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{bc} + \frac{d v}{d x}\mathfrak{ca} + \frac{\partial w}{d x}\mathfrak{ab}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{bc},$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathfrak{c} - \frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{b}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{abc}.$$

Somit liefert die ganze Begrenzung des Parallelepipedons bis auf Grössen höherer Ordnung

$$-\mathfrak{F} \mid \nabla \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \mathfrak{abc},$$

was sich abermals gegen den Beitrag des Raumintegrals weghebt.

Der Übergang zu einem beliebigen Körper, über dessen Begrenzung und Rauminhalt die beiden Integrale erstreckt werden, geschieht genau wie im ersten Fall, was wir nicht zu wiederholen brauchen.

Aus den drei Theoremen können wir die Schlussfolgerung bestätigen, dass die drei Grössen $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ von der Wahl der Einheitsvektoren unabhängig sind. Denn für einen hinreichend

kleinen Körper vom Volumen $\Delta\tau$ sind bis auf Grössen höherer Ordnung die drei räumlichen Integrale gleich

$$\mathfrak{f} \mid \nabla\Delta\tau,\quad \mathfrak{p} \mid \nabla\Delta\tau,\quad \mathfrak{F} \mid \nabla\Delta\tau.$$

Mithin ist bis auf Grössen, die mit $\Delta\tau$ verschwinden

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = -\frac{1}{\Delta\tau}\int \mathfrak{f}\, d\mathfrak{S},\quad \mathfrak{p}\mid\nabla \doteq -\frac{1}{\Delta\tau}\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S},\quad \mathfrak{F}\mid\nabla = -\frac{1}{\Delta\tau}\mathfrak{F}\, d\mathfrak{S}.$$

D. h. $\mathfrak{f} \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ können definiert werden als die Grenzwerte, denen sich die rechten Seiten mit abnehmendem $\Delta\tau$ nähern. Da die rechten Seiten nun von den gewählten Einheitsvektoren unabhängig sind, so folgt dasselbe für die linken Seiten.

Statt der Plangrösse $\mathfrak{f} \mid \nabla$ können wir auch ihre Ergänzung den oben definierten Vektor $\nabla\mathfrak{f}$ einführen. Für $\mathfrak{p} \mid \nabla$ können wir auch das skalare Produkt $\nabla . \mathfrak{p}$ schreiben und für $\mathfrak{F} \mid \nabla$ können wir auch das vektorielle Produkt der beiden Ergänzungen von $\mathfrak{F}$ und $\mid \nabla$ also $\mid \mathfrak{F} \times \nabla$ oder $-\nabla \times \mid \mathfrak{F}$ schreiben. Indessen wird die Gleichartigkeit der drei Integralsätze dadurch verdeckt.

§ 9. Anwendungen der Umwandlungstheoreme.

In eine ruhende schwere Flüssigkeit sei ein Körper vollständig eingetaucht. Der Druck an seiner Oberfläche ist eine skalare Ortsfunktion, die wir mit p bezeichnen. Die Kraft, die der Flüssigkeitsdruck auf das Oberflächenelement $d\mathfrak{S}$ ausübt, ist als die Ergänzung der Plangrösse

$$p\, d\mathfrak{S}$$

darstellbar. Die Resultante des gesamten Flüssigkeitsdruckes ist mithin gleich der Ergänzung der Plangrösse

$$\int p\, d\mathfrak{S},$$

wobei das Integral über die Oberfläche des Körpers zu erstrecken ist.

Nach der ersten der drei Formeln ist daher die Resultante gleich der Ergänzung von

$$-\int p \mid \nabla d\tau,$$

d. h. die Resultante selbst ist gleich

$$-\int \nabla p\, d\tau.$$

Nehmen wir z. B. die Flüssigkeit als inkompressibel von der konstanten Dichte ϱ an und setzen die Schwerkraft gleich

$$\mathfrak{g}\mathfrak{c},$$

so haben wir den Druck in der Tiefe z unter der Oberfläche gleich

$$\varrho g z$$

zu setzen. Damit wird der Gradient des Druckes $\nabla p = \varrho g \mathfrak{c}$ und die Resultante des Gesamtdruckes gleich

$$-\int \varrho g d\tau \mathfrak{c}.$$

D. h. die Resultante ist dem Gewicht des verdrängten Wassers gerade entgegengesetzt. Die mathematische Formel (1) § 8 ist durch das physikalische Bild vollkommen dargestellt, wenn wir den Raum, den der Körper einnimmt, wieder mit Flüssigkeit gefüllt denken. Bei jedem Flüssigkeitsteilchen $d\tau$ ist der Druck, den es auf seiner Oberfläche erfährt im Gleichgewicht mit seiner Schwere, die somit den Wert

$$\nabla p d\tau$$

haben muss. ∇p ist also das Vektorfeld der auf die Volumeinheit bezogenen Schwere. Am anschaulichsten ist es, sich zwei Flächen $p =$ konst. und $p + dp =$ konst. vorzustellen und zwischen ihnen ein zylindrisches Element von der Höhe dn und dem Querschnitt $d\tau/dn$ (Fig. 26). Um dem Überdruck dp auf der Fläche $d\tau/dn$ das Gleichgewicht zu halten, muss die Schwere des Elements die Richtung der Normale von der Fläche $p =$ konst. zur Fläche $p + dp =$ konst. haben und die Grösse $dp\, d\tau/dn$ besitzen, d. h. sie muss gleich dem Vektor $\nabla p\, d\tau$ sein.

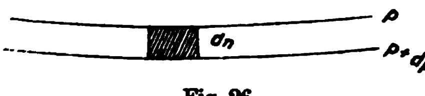


Fig. 26.

Die Formel (2) § 8 lässt sich durch ein anderes physikalisches Bild veranschaulichen. Als Vektorfeld denken wir uns das Produkt $\varrho\mathfrak{v}$ von Dichte und Geschwindigkeit einer im Raume strömenden Flüssigkeit und grenzen darin einen beliebigen Raum ab. Der Vektor $\varrho\mathfrak{v}$ ist dabei für jeden Augenblick eine Funktion des Ortes, d. h. wir brauchen uns nicht auf den Fall einer stationären Strömung zu beschränken, wo der Vektor von der Zeit unabhängig ist. Jedes beliebige mit der Zeit in irgendeiner Weise veränderliche Vektorfeld $\mathfrak{p}$ gibt die Möglichkeit zu einem solchen

physikalischen Bilde einer strömenden Flüssigkeit. Dabei können wir sogar in irgendeinem Augenblick für die Dichte ϱ eine beliebige positive skalare Funktion annehmen. Wie aus den folgenden Erörterungen hervorgeht, ergibt sich dann die Dichte aus dem Vektorfeld $\mathfrak{p}$ für alle anderen Zeiten und wenn ϱ ermittelt ist, findet man $\mathfrak{v} = \mathfrak{p}/\varrho$.

Ist die Plangrösse $d\mathfrak{S}$ wie oben ein Element der Oberfläche, mit solchem Umlaufsinn, dass das Innere des Raumes auf seiner positiven Seite liegt, so stellt das äussere Produkt

$$\varrho\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}\,dt$$

die Menge der Flüssigkeit dar, die im Zeitteilchen dt durch $d\mathfrak{S}$ hindurchströmt, positiv gerechnet, wenn sie in den Raum hinein, negativ, wenn sie herausströmt. Das Integral

$$\int\varrho\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}\,dt$$

über die ganze Begrenzung des Raumes erstreckt, wird also durch sein positives oder negatives Vorzeichen angeben, ob mehr Flüssigkeit in den Raum hinein oder mehr herausströmt und sein Betrag gibt an, um wie viel sich die in dem Raume befindliche Menge in dem Zeitteilchen dt vermehrt oder vermindert hat. In jedem Raumelement $d\tau$ ändert sich nun die Dichte in dem Zeitteilchen dt um $\frac{\partial\varrho}{\partial t}dt$. Wir können daher den Wert jenes Integrals auch in der Form

$$\int\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\tau\,dt$$

schreiben, und es ist also

$$\int\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\tau = \int\varrho\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}.$$

Damit lässt sich die Formel (2) § 8 schreiben

$$\int\left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\mathfrak{v})\right)d\tau = 0$$

und es folgt, da der Raum beliebig abgegrenzt werden kann,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\mathfrak{v}) = 0.$$

Die Formel (2) drückt hier also nichts anderes aus als die Material-

$\mathfrak{p}$ilanz für den betrachteten Raum. Die Änderung der im Raume enthaltenen Menge lässt sich einmal durch die Flüssigkeit berechnen, die durch die Begrenzung hindurchströmt, und andererseits durch die Dichtigkeitsänderung in jedem Raumelement. Das Oberflächenintegral, das die erste Berechnung liefert

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} \qquad (\mathfrak{p} = \varrho \mathfrak{v})$$

muss daher gleich dem Raumintegral

$$-\int \mathfrak{p} \mid \nabla d\tau$$

der zweiten Berechnung sein, wie Formel (2) besagt.

Der Ausdruck $\mathfrak{p} \mid \nabla$ oder, was dasselbe ist $\nabla . \mathfrak{p}$, wird die „Divergenz" des Vektorfeldes $\mathfrak{p}$ genannt. Der Ausdruck stammt von der physikalischen Bedeutung von $\nabla . \mathfrak{v}$, wo $\mathfrak{v}$ das Vektorfeld der Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit bedeutet. Da nämlich, wie oben gezeigt,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla . \varrho \mathfrak{v} = -\nabla \varrho . \mathfrak{v} - \varrho \nabla . \mathfrak{v},$$

so kann man auch schreiben

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = \nabla . \mathfrak{v},$$

wo $\frac{d\varrho}{dt}$ für $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \varrho . \mathfrak{v}$ steht und die (auf die Zeiteinheit bezogene) zeitliche Änderung der Dichte eines Flüssigkeitteilchens misst, das in dem Zeitteilchen dt die Verschiebung $\mathfrak{v}\, dt$ erfährt. Denn die zeitliche Änderung seiner Dichte setzt sich zusammen aus der Änderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt$ (unter Festhaltung von x, y, z) und aus den Änderungen infolge der Änderungen von x, y, z um $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, d. i. $\frac{\partial \varrho}{\partial x} u\,dt + \frac{\partial \varrho}{\partial y} v\,dt + \frac{\partial \varrho}{\partial z} w\,dt = \nabla \varrho . \mathfrak{v}\, dt$. Der Wert von $\nabla . \mathfrak{v}$ gibt also die auf die Zeiteinheit bezogene relative zeitliche Änderung der Dichte an derart, dass ein positiver Wert von $\nabla . \mathfrak{v}$ eine Verdünnung, ein Auseinanderweichen (Divergenz) der Flüssigkeit an der betreffenden Stelle bedeutet. Daher nennt man $\nabla . \mathfrak{v}$ die „Divergenz" des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$ und überträgt nun den Begriff auf ein beliebiges Vektorfeld $\mathfrak{p}$, auch wenn $\mathfrak{p}$ nicht eine

Geschwindigkeit ist, sondern irgendeine andere physikalische Bedeutung hat.

Ist die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathfrak{p}$ gleich Null

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \nabla \cdot \mathfrak{p} = 0,$$

so sagt die Formel (2) aus, dass für die Begrenzung jedes beliebigen im Felde gelegenen Körpers

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} = 0.$$

Denken wir uns wieder eine strömende Flüssigkeit von der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ derart, dass $\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{v}$, so ist infolge der Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathfrak{p} = 0$$

die Dichte an jeder Stelle von der Zeit unabhängig. Nehmen wir sie nun in irgendeinem Augenblick überall gleich 1 an, so bleibt sie dauernd gleich 1 und es ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{v}.$$

Das Vektorfeld $\mathfrak{p}$, dessen Divergenz überall verschwindet, kann also als das Feld der Geschwindigkeitsvektoren einer strömenden inkompressibeln Flüssigkeit von der Dichte 1 gedeutet werden. Die Gleichung

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} = 0$$

bedeutet, dass in den Raum, über dessen Begrenzung das Integral erstreckt wird, in jedem Augenblick gerade so viel Flüssigkeit hinein- wie herausströmt.

Wir können, wenn wir wollen, das Vektorfeld festhalten, so dass es sich nicht mit der Zeit ändert. Dann haben wir es mit einer stationären Strömung zu tun. Durch irgendeinen kleinen Teil der Begrenzung des Raumes möge nun die Flüssigkeit in den Raum eintreten. Wir verfolgen die strömenden Teilchen, bis sie an einer anderen Stelle der Begrenzung wieder aus dem Raum hinaustreten. Wir nennen diesen Teil der Flüssigkeit einen Stromfaden. Die Stärke des Stromes, der in ihm fliesst, d. h. die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch seinen Querschnitt fliesst, wird durch das Integral

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} = \varepsilon$$

gemessen erstreckt über den Teil der Begrenzung, wo der Strom-

faden in den Raum eintritt; aber ebenso gut können wir den Strom berechnen, wenn wir das Integral über einen beliebigen anderen Querschnitt des Fadens erstrecken und $d\mathfrak{S}$ ein Element des Querschnitts mit solchem Umlaufsinn bedeutet, dass der Strom von der negativen zur positiven Seite fliesst. Dass $\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S}$ für jeden Querschnitt des Stromfadens denselben Wert gibt, folgt einmal unmittelbar aus der physikalischen Bedeutung des Integrals, weil ja durch jeden Querschnitt bei einer inkompressibeln stationär strömenden Flüssigkeit in der Zeiteinheit die gleiche Menge hindurchfliesst, andererseits schliessen wir es mathematisch, wenn wir den Raum zwischen zwei beliebigen Querschnitten betrachten und über seine Begrenzung das Integral

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S}$$

erstrecken. Nach der Formel (2) § 8 muss dies Integral infolge der verschwindenden Divergenz von $\mathfrak{p}$ Null sein. Nun verschwindet $\mathfrak{p}\, d\mathfrak{S}$ überall am Ufer des Stromfadens, weil $\mathfrak{p}$ dort der Plangrösse $d\mathfrak{S}$ parallel ist. Mithin heben sich die beiden über die Querschnitte erstreckten Teile gegeneinander fort oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie sind einander gleich, wenn bei beiden die Elemente $d\mathfrak{S}$ so gerechnet werden, dass der Strom von der negativen zur positiven Seite fliesst.

Ein solches Vektorfeld $\mathfrak{p}$, für das die Divergenz $\nabla . \mathfrak{p}$ verschwindet, kann man sich mithin aus lauter Stromfäden von gleicher Stärke ε zusammengesetzt denken. Wenn man dann für irgendeinen Teil der Begrenzung eines Raumes das Integral

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S}$$

berechnen will, so braucht man nur die hindurchlaufenden Stromfäden zu zählen, und zwar positiv, wenn sie in den Raum, also von der negativen zur positiven Seite von $d\mathfrak{S}$, fliessen, negativ im entgegengesetzten Fall. Die Zahl der Stromfäden gibt dann mit ε multipliziert den Wert des Integrals an. Diese anschauliche Methode ist zuerst bei den magnetischen Feldern angewendet worden, wo $\mathfrak{p}$ die Kraft bedeutet, die ein magnetischer Pol von der Stärke 1 an der betreffenden Stelle des Feldes erfährt. Ein magnetisches Feld hat nämlich die Eigenschaft, dass seine Divergenz an jeder Stelle verschwindet.

Um auch für die Formel (3) § 8 ein physikalisches Beispiel zu geben, wollen wir wieder einen in eine schwere Flüssigkeit getauchten Körper betrachten und das Drehungsmoment berechnen, das der Flüssigkeitsdruck auf ihn ausübt.

Der Druck auf dem Element $d\mathfrak{S}$ ist der Vektor, dessen Ergänzung, wie schon oben bemerkt, gleich

$$p\,d\mathfrak{S}$$

ist, wenn wir mit p wieder den Druck bezeichnen. Bedeutet nun $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor des Elements $d\mathfrak{S}$, so kann das Moment der Kraft in bezug auf den Punkt O, von dem der Ortsvektor ausgeht, dargestellt werden als das vektorielle Produkt des Ortsvektors mit der Kraft oder, was dasselbe ist, als das äussere Produkt der Ergänzung von $\mathfrak{r}$ mit $p\,d\mathfrak{S}$, der Ergänzung der Kraft. Somit kann das Gesamtmoment des Flüssigkeitsdruckes in bezug auf O durch den Vektor

$$\int \mathfrak{R}\,p\,d\mathfrak{S}$$

dargestellt werden, wenn $\mathfrak{R}$ die Ergänzung des Ortsvektors bedeutet. Auf dieses Integral wollen wir die Formel (3) § 8 anwenden, indem wir $\mathfrak{R}p$ für die Plangrösse $\mathfrak{F}$ einsetzen. Das Drehungsmoment kann demnach auch als Raumintegral

$$-\int \mathfrak{F} \mid \nabla\, d\tau$$

geschrieben werden. Den Vektor $\mathfrak{F} \mid \nabla$ können wir nun in zwei Teile teilen, entsprechend den beiden Faktoren von $\mathfrak{F}$. Wäre p vom Ort unabhängig, so hätten wir nur den Teil $p(\mathfrak{R} \mid \nabla)$; wäre $\mathfrak{R}$ vom Ort unabhängig, so hätten wir nur den Teil $\mathfrak{R}(p \mid \nabla)$ oder $\mathfrak{R} \mid (\nabla p)$. Wenn p und $\mathfrak{R}$ beide vom Ort abhängen, so ist

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = p(\mathfrak{R} \mid \nabla) + \mathfrak{R} \mid \nabla p,$$

oder, wie wir auch schreiben können

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = p(\mathfrak{r} \times \nabla) + \mathfrak{r} \times \nabla p.$$

Nun ist $\mathfrak{r} \times \nabla$ gleich Null, wie man durch die Ausführung von

$$\left(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}\right)$$

unmittelbar erkennt. Somit wird

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = \mathfrak{r} \times \nabla p,$$

und das Drehungsmoment nimmt die Form an

$$-\int \mathfrak{r} \times \nabla p\, d\tau.$$

Denken wir uns den Körper durch Flüssigkeit ersetzt, so ist, wie wir oben aus der Gleichung (1) § 8 fanden, $\nabla p \, d\tau$ die Schwere eines Flüssigkeitsteilchens, mithin $\mathfrak{r} \times \nabla p \, d\tau$ das Drehungsmoment der Schwere in bezug auf den Punkt O. Die Formel (3) § 8 sagt also nichts anderes aus, als dass der Flüssigkeitsdruck auf die Begrenzung das entgegengesetzte Moment ergibt, wie die Schwere der Flüssigkeit im Innern der Begrenzung. Es leuchtet ein, dass das nichts anderes ist als die Bedingung für das Gleichgewicht der Flüssigkeit. Wenn man einen beliebigen Teil der Flüssigkeit abgrenzt, so müssen die an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Diese Kräfte bestehen aber aus den Drucken auf die Begrenzungselemente und aus den Gewichten der Flüssigkeitsteilchen. Der Druck kann dabei irgendeine skalare Ortsfunktion sein, die dann das Schwerefeld bestimmt. Das Gleichgewicht ist dadurch gegeben, dass die Summe der Drehungsmomente aller dieser Kräfte in bezug auf einen beliebigen Punkt Null ist.

§ 10. Die Umwandlung von Randintegralen in Flächenintegrale.

Den drei Formeln (1), (2), (3) § 8 entsprechen drei andere, in denen an Stelle des Raumintegrals ein Integral über einen Teil der Begrenzung eines Körpers und an Stelle des Oberflächenintegrals ein Integral über den Rand jener Begrenzung tritt.

Es bezeichne $d\mathfrak{r}$ ein Element des Randes und $d\mathfrak{S}$ ein Element der Begrenzung derart, dass der Umlaufsinn von $d\mathfrak{S}$ derselbe ist wie der Umlaufsinn, der durch die Richtung von $d\mathfrak{r}$ definiert wird. Dann gelten die folgenden drei Formeln

$$(1^*) \qquad \int f \, d\mathfrak{r} + \int (f \mid \nabla) \, d\mathfrak{S} = 0,$$

$$(2^*) \qquad \int \mathfrak{p} \, d\mathfrak{r} - \int (\mathfrak{p} \mid \nabla) \, d\mathfrak{S} = 0,$$

wo $\mathfrak{p}$ einen Vektor bedeutet, der der Plangrösse $d\mathfrak{S}$ überall parallel ist,

$$(3^*) \qquad \int \mathfrak{F} \, d\mathfrak{r} + \int (\mathfrak{F} \mid \nabla) \, d\mathfrak{S} = 0.$$

Der Beweis ist dem für die vorigen drei Formeln ganz ähnlich. Denken wir uns nämlich die Oberfläche in eine grosse Anzahl von kleinen Teilen zerteilt und den Rand eines jeden Teiles in demselben Sinne durchlaufen wie den ursprünglichen Rand, so

kann man das Integral über den Rand in jeder der drei Formeln durch die Summe der Randintegrale der Teile ersetzen. Denn alle die Randteile, in denen zwei der Stücke aneinander grenzen, werden bei der Integration in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so dass die betreffenden Integralteile sich gegenseitig wegheben. So bleiben nur diejenigen Randteile übrig, die dem ursprünglichen Rande angehören, und werden bei der Integration über die Ränder der Stücke in demselben Sinne durchlaufen wie bei dem ursprünglichen Randintegral.

Wir wollen uns nun die Stücke so klein denken, dass wir sie als eben betrachten können. Ein inneres Stück möge dabei als Rechteck angenommen werden, und wir wollen die x- und y-Achse den Rechteckseiten parallel legen derart, dass das Randintegral von einer Ecke x, y über $x+\Delta x, y$; $x+\Delta x, y+\Delta y$; $x, y+\Delta y$ zurück zu x, y gerechnet wird. Die Einheitsvektoren seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, die sich selbst reziprok sind. Um unsere Vorstellungen festzulegen, mag die Formel (1*) betrachtet werden. Die beiden der y-Achse parallelen Seiten liefern dann

$$\left(\int f(x+\Delta x, y)\,dy - \int f(x, y)\,dy\right)\mathfrak{j},$$

d. i. bis auf Grössen höherer Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \Delta y\,\mathfrak{j},$$

und die beiden der x-Achse parallelen Seiten liefern

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\Delta x \Delta y\,\mathfrak{i}.$$

Das Rechteck als Plangrösse aufgefasst, möge mit $\Delta\mathfrak{G}$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\Delta\mathfrak{G} = \Delta x \Delta y\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}.$$

Das Randintegral

$$\int f\,d\mathfrak{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathfrak{i}\right)\Delta x \Delta y + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

lässt sich dann bis auf die Glieder höherer Ordnung als das äussere Produkt der beiden Plangrössen

$$\Delta\mathfrak{G} \text{ und } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{i}\mathfrak{j}\right) = f \mid \nabla$$

schreiben. Denn in dem äusseren Produkt

$$\Delta\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla)$$

wird $(\mathfrak{i}\mathfrak{j})(\mathfrak{j}\mathfrak{k}) = \mathfrak{j}$, $(\mathfrak{i}\mathfrak{j})(\mathfrak{k}\mathfrak{i}) = -\mathfrak{i}$, $(\mathfrak{i}\mathfrak{j})(\mathfrak{i}\mathfrak{j}) = 0$, und es ergibt sich daher

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y}\mathfrak{i}\right) \Delta x \Delta y.$$

Wir erhalten somit

$$\int \mathfrak{f}\, d\mathfrak{r} = \Delta\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla) + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Da $\Delta\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{f} \mid \nabla$ vom Koordinatensystem unabhängig sind, so ist es auch $\Delta\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla)$.

Das ganze Randintegral lässt sich nun bis auf einen Rest, der beliebig klein wird, wenn die $\Delta\mathfrak{S}$ genügend klein sind, aus der Summe der äusseren Produkte $\Delta\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla)$ zusammensetzen und so ergibt sich das ganze Randintegral als der Grenzwert, dem sich die Summe über die Grössen $\Delta\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla)$ nähert, wenn die $\Delta\mathfrak{S}$ beliebig klein werden, d. h. es ist

$$\int \mathfrak{f}\, d\mathfrak{r} = \int d\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \mid \nabla),$$

oder

$$\int \mathfrak{f}\, d\mathfrak{r} + \int (\mathfrak{f} \mid \nabla)\, d\mathfrak{S} = 0.$$

Die Zerteilung in Rechtecke kann man sich so vorgenommen denken, dass die Oberfläche mit zwei sich rechtwinklig schneidenden Scharen von Kurven überzogen wird. Die am Rande übrigbleibenden, nicht rechteckigen Teile, geben zusammen nur einen Beitrag von der Ordnung ihrer Gesamtfläche, die für hinreichend kleine Rechtecke ein beliebig kleiner Bruchteil der gegebenen Fläche wird.

Die Formel (2*) wird auf dieselbe Weise bewiesen. Um den Rand der rechteckigen Plangrösse $\Delta\mathfrak{S}$ erstreckt, liefert das Randintegral bis auf Grössen höherer Ordnung

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y}\mathfrak{i}\right) \Delta x \Delta y.$$

Da $\mathfrak{p}$ parallel $\Delta\mathfrak{S}$ ist, so kann es aus $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ numerisch abgeleitet werden

$$\mathfrak{p} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j}.$$

Somit wird

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y}\mathfrak{i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathfrak{i}\mathfrak{j}$$

$$= (\mathfrak{p} \mid \nabla)\,\mathfrak{i}\mathfrak{j},$$

und daher bis auf Grössen höherer Ordnung für den Rand des Rechtecks

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y}\mathfrak{i}\right)\Delta x \Delta y = (\mathfrak{p} \mid \nabla)\Delta \mathfrak{G},$$

wo die rechte Seite wieder von dem gewählten Koordinatensystem unabhängig ist. Aus demselben Grunde wie oben erhält man daraus für das ganze Randintegral

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{r} = \int (\mathfrak{p} \mid \nabla)\, d\mathfrak{G}.$$

Im Falle (3*) erhalten wir für den Rand von $\Delta \mathfrak{G}$ bis auf Grössen höherer Ordnung

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\mathfrak{i}\right)\Delta x \Delta y,$$

was wir wieder in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Form schreiben können

$$-(\mathfrak{F} \mid \nabla)\Delta \mathfrak{G}.$$

Für das ganze Randintegral ergibt sich daher in derselben Weise wie oben

$$-\int (\mathfrak{F} \mid \nabla)\, d\mathfrak{G},$$

und damit die Formel (3*)

(3*) $$\int \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r} + \int (\mathfrak{F} \mid \nabla)\, d\mathfrak{G} = 0.$$

Bezeichnet man den Vektor, der die Ergänzung der Plangrösse $\mathfrak{F}$ bildet mit $\mathfrak{f}$, so kann man die Formel (3*) auch schreiben

$$\int \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r} + \int (\mathfrak{f} \times \nabla)\, d\mathfrak{G} = 0,$$

$(\mathfrak{f} \times \nabla)\, d\mathfrak{G}$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Vektor $\mathfrak{f} \times \nabla$ nach der positiven oder nach der negativen Seite von $d\mathfrak{G}$ gerichtet ist, und der numerische Wert ist gleich dem Rauminhalt, der überstrichen wird, wenn man die Plangrösse $d\mathfrak{G}$ um den Vektor $\mathfrak{f} \times \nabla$ verschiebt.

Ist in der ganzen Fläche, auf die sich die Formel (3*) bezieht, $\mathfrak{f} \times \nabla = 0$, so ist auch $\int \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r} = 0$. Sind A und P zwei Punkte des Randes, so werden sich also die beiden Teile des Randintegrales, die sich auf den Weg längs des Randes von A bis P und von P bis A beziehen, gegeneinander wegheben oder, was auf das-

selbe hinauskommt, man wird denselben Wert erhalten, wenn man das Integral

$$\int_A^P \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r}$$

von A bis P erstreckt, gleichgültig, ob man auf der einen oder der anderen Seite des Randes herumläuft. Überhaupt irgend ein Weg, der von A nach P führt, gibt dem Integral denselben Wert wie ein anderer, wofern er nur aus diesem durch kontinuierliche Veränderung in einem Raume, in dem $\mathfrak{F} \mid \nabla$ Null ist, abgeleitet werden kann. Denn dann bilden die beiden Wege zusammen den Rand einer Fläche, für die $\mathfrak{F} \mid \nabla$ verschwindet. Halten wir nun den Punkt A fest, während wir P veränderlich lassen, so definiert uns das Integral

$$\int_A^P \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r}$$

eine skalare Funktion f der Ortslage von P. Bei der Verschiebung des Punktes P um $d\mathfrak{r}$ ändert sich die Funktion um $\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r}$. Das heisst der Vector $\mathfrak{f}$ ist der Gradient der skalaren Funktion. Umgekehrt, wenn der Vektor $\mathfrak{f}$ der Gradient einer skalaren Funktion f ist, so muss

$$\mathfrak{f} \times \nabla = 0$$

sein. Denn dann ist

$$\int \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r} = \int df = 0,$$

wenn wir das Integral um den Rand eines Gebietes erstrecken, wo der Gradient definiert ist. Daraus folgt nach unserer Formel

$$\int (\mathfrak{f} \times \nabla)\, d\mathfrak{S} = 0,$$

und da die Begrenzung beliebig ist,

$$\mathfrak{f} \times \nabla = 0.$$

Dasselbe erkennt man auch direkt; denn

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{k}\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}\right) = 0,$$

weil sich die Reihenfolge der Differentiation vertauschen lässt.

Die Eigenschaft des Vektorfeldes

$$\mathfrak{f} \times \nabla = 0$$

ist also nicht nur die hinreichende, sondern auch die notwendige Bedingung dafür, dass der Vektor $\mathfrak{f}$ der Gradient einer skalaren Funktion sei oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass

$$\mathfrak{f} . d\mathfrak{r}$$

ein vollständiges Differential sei.

Wenn das Integral

$$\int \mathfrak{f} . d\mathfrak{r},$$

über eine geschlossene Kurve erstreckt, einen von Null verschiedenen Wert annimmt, so folgt daraus, dass, wenn wir irgendeine Fläche konstruieren, deren Rand die geschlossene Kurve bildet, auf dieser Fläche eine Stelle oder Stellen liegen müssen, wo $\mathfrak{f} \times \nabla$ nicht Null ist. Solche Flächenteile, in denen $\mathfrak{f} \times \nabla$ Null ist, tragen nicht zu dem Flächenintegral bei, sondern nur die Flächenteile, in denen $\mathfrak{f} \times \nabla$ von Null verschieden ist. Diese allein bestimmen den Wert des Flächenintegrals und damit nach (3*) auch den Wert des Randintegrals. Bei einer Änderung des Randes, bei der nur solche Flächenteile abgeschnitten oder angefügt werden, in denen $\mathfrak{f} \times \nabla$ verschwindet, wird daher der Wert des Randintegrals ungeändert bleiben. Mit anderen Worten, man wird die Kurve im Raume kontinuierlich verändern können, ohne den Integralwert zu ändern, wofern nur in dem von der Kurve bei ihrer Veränderung überstrichenen Gebiet $\mathfrak{f} \times \nabla$ überall verschwindet. Wenn sich bei solcher Änderung die Kurve in einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne das Gebiet, wo $\mathfrak{f} \times \nabla$ verschwindet, zu verlassen, so muss das Randintegral den Wert Null haben. Ein Gebiet, das die Eigenschaft hat, dass jede in ihm verlaufende geschlossene Kurve sich in einen Punkt zusammenziehen lässt, heisst einfach zusammenhängend. Wenn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ein Vektorfeld $\mathfrak{f}$ definiert ist, für das $\mathfrak{f} \times \nabla$ verschwindet, so muss jedes über eine geschlossene Kurve des Gebietes erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{f} . d\mathfrak{r}$$

den Wert Null haben. Mehrfach zusammenhängend heisst ein Gebiet, wenn in ihm geschlossene Kurven vorkommen, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, ohne das Gebiet zu verlassen, wie z. B. der Raum, den ein Fingerring einnimmt. Eine geschlossene Kurve, die innerhalb des Ringes den Finger einmal um-

schlingt, lässt sich zwar kontinuierlich in jede andere überführen, die dasselbe tut, aber sie lässt sich nicht beliebig zusammenziehen. Wenn nun ein Vektorfeld $\mathfrak{f}$ definiert wäre, das in dem Gebiete des Ringes die Eigenschaft

$$\mathfrak{f} \times \nabla = 0$$

besässe, so würde der Fall eintreten können, dass

$$\int \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r}$$

über eine geschlossene Kurve integriert, einen von Null verschiedenen Wert hätte. Für alle geschlossenen Kurven, die innerhalb des Ringes verlaufend den Finger einmal in gleichem Sinne umkreisen, müsste der Wert des Integrals derselbe sein, für eine Kurve, die ihn n-mal in demselben Sinne umkreist, das n-fache davon. Die skalare Funktion f, die wir durch die Integration von einem festen Punkt A zu einem veränderlichen Punkt P erhalten, wird dann mehrdeutig. Für denselben Punkt P kann der Wert von f um ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches einer gewissen Konstanten geändert werden, indem man den Ring erst beliebig oft in dem einen oder anderen Sinne umkreist, ehe man zu P gelangt. Wir nennen ein solches Gebiet zweifach zusammenhängend. Ebenso ist der ganze Raum ausserhalb des Ringes zweifach zusammenhängend. Jede geschlossene Kurve, die ausserhalb des Ringes verläuft, aber in den Ring nicht einhakt, lässt sich in einen Punkt zusammenziehen, jede geschlossene Kurve, die einmal durch ihn hindurchfasst, lässt sich in jede andere überführen, die dasselbe tut. Denken wir uns in dem Ringe eine elektromotorische Kraft angebracht, die einen elektrischen Strom in dem Ringe umströmen lässt. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Feld $\mathfrak{f}$, von dem in der Elektrizitätslehre gezeigt wird, dass es ausserhalb des Ringes, wo kein elektrischer Strom fliesst, die Eigenschaft

$$\mathfrak{f} \times \nabla = 0$$

besitzt und dass innerhalb des Ringes, wo der elektrische Strom fliesst,

$$(\nabla \times \mathfrak{f})\, d\mathfrak{S},$$

bei den in der Elektrizitätslehre üblichen Einheiten, gleich dem 4π-fachen des durch $d\mathfrak{S}$ fliessenden Stromes ist positiv gerechnet, wenn er nach der positiven Seite von $d\mathfrak{S}$ fliesst.

Denken wir uns nun eine Fläche, die den Ring an einer Stelle aufschneidet, und integrieren um den Rand dieser Fläche

$$\int \mathfrak{f} . d\mathfrak{r},$$

so ist nach der Formel (3*) dieses Randintegral gleich dem Oberflächenintegral

$$\int (\nabla \times \mathfrak{f}) \, d\mathfrak{S}$$

und gibt somit durch sein Vorzeichen an, ob der elektrische Strom von der negativen zur positiven Seite der Fläche fliesst oder umgekehrt, und durch seinen numerischen Wert dividiert durch 4π, eine wie grosse Elektrizitätsmenge in der Zeiteinheit hindurchtritt. Mit anderen Worten, die Konstante

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{f} . d\mathfrak{r}$$

misst den Strom, der in dem Ringe fliesst. Die Form der Kurve ist dabei unwesentlich, wenn sie nur in den Ring einhakt.

Der Vektor

$$\nabla \times \mathfrak{f}$$

heisst der Wirbel oder die Rotation oder der Rotor des Feldes $\mathfrak{f}$ an der betrachteten Stelle. Der Name rührt her von der Betrachtung einer strömenden Flüssigkeit. Wie wir später zeigen werden gibt, wenn $\mathfrak{f}$ das Vektorfeld der Geschwindigkeit bezeichnet,

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathfrak{f}$$

die Drehungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit an der betreffenden Stelle an. Die Richtung dieses Vektors $\frac{1}{2} \nabla \times \mathfrak{f}$ gibt die Richtung der Drehungsachse an derart, dass die Drehung in dem Sinne einer Rechtsschraube erfolgt, die sich in der Richtung des Vektors verschiebt. Die Länge des Vektors entspricht der Grösse der Drehungsgeschwindigkeit.

Das Vektorfeld $\mathfrak{f}$ führt also, wenn seine Rotation nicht Null ist, d. h. wenn $\mathfrak{f}$ nicht der Gradient einer skalaren Funktion ist, zu einem zweiten Vektorfeld

$$\mathfrak{g} = \nabla \times \mathfrak{f}.$$

Die Divergenz (vergl. § 9) dieses zweiten Vektorfeldes $\mathfrak{g}$ ist Null. Denn es ist

$$\nabla \cdot \mathfrak{g} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathfrak{f}).$$

Nun lassen sich auf der rechten Seite die drei Faktoren zyklisch vertauschen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathfrak{f}) = \nabla \cdot (\mathfrak{f} \times \nabla),$$

aber $\mathfrak{f} \times \nabla = - \nabla \times \mathfrak{f}$, folglich ist

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathfrak{f}) = - \nabla \cdot (\nabla \times \mathfrak{f})$$

und daher gleich Null analog der Formel, dass das aus drei Vektoren abgeleitete Parallelepipedon verschwindet, wenn zwei Vektoren einander gleich werden. Das abgeleitete Vektorfeld $\mathfrak{g}$ ist also von der oben (§ 9) betrachteten Art, wo $\mathfrak{g}$ sich als der Geschwindigkeitsvektor einer inkompressibeln stationär strömenden Flüssigkeit auffassen und das Vektorfeld sich in Stromfäden auflösen lässt, die alle die gleiche Stromstärke haben.

§ 11. Einführung krummliniger Koordinaten.

Die Grössen $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$, die wir aus der skalaren Ortsfunktion f, dem Vektorfelde $\mathfrak{p}$ und dem Plangrössenfelde $\mathfrak{F}$ abgeleitet haben, konnten wir definieren als die Grenzwerte, denen sich die Quotienten aus den Integralen

$$\int f \mid \nabla d\tau = -\int f d\mathfrak{S};\ \int \mathfrak{p} \mid \nabla d\tau = -\int \mathfrak{p} d\mathfrak{S};\ \int \mathfrak{F} \mid \nabla d\tau = -\int \mathfrak{F} d\mathfrak{S}$$

dividiert durch den Rauminhalt $\Delta\tau$ nähern, wenn man den Raum $\Delta\tau$, über den die Integrale erstreckt sind, um einen Punkt zusammenzieht. Daraus können wir die einfachen Ausdrücke ableiten, die für $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ oben angegeben sind, wenn irgendein auf drei feste Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezogenes Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, in dem sich der Ortsvektor $\mathfrak{r}$, der von dem Anfangspunkt O zu dem betrachteten Punkt führt in der Form

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}$$

darstellt.

Führt man nun an Stelle von x, y, z andere Veränderliche ξ, η, ζ ein, indem man x, y, z als Funktionen von ξ, η, ζ darstellt, so fragt es sich, ob die einfache Darstellung von $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ durch den Operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{a}^* + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{b}^* + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{c}^*$$

sich in ähnlicher Weise auch für die neuen Veränderlichen gewinnen lässt. Zu dem Ende betrachten wir eine beliebige Funktion f des Ortes. Dann ist

$$df = \nabla f . d\mathfrak{r}.$$

Andererseits ist aber auch für die krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial z} d\zeta.$$

Wenn wir nun die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \zeta}$ mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ bezeichnen, so ist

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}\,d\xi + \mathfrak{f}\,d\eta + \mathfrak{g}\,d\zeta$$

und, wenn $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ das zu $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ reziproke System von Vektoren ist, so ergibt sich für ein beliebiges $d\mathfrak{r}$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial f}{\partial \eta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\mathfrak{g}^*\right) . d\mathfrak{r}.$$

Durch diese Relation zwischen df und $d\mathfrak{r}$ ist aber der Gradient ∇f, wie wir oben sahen, definiert, also ist

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \xi}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial f}{\partial \eta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\mathfrak{g}^*$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, man kann den Operator ∇ auch in der Form schreiben

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial}{\partial \eta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathfrak{g}^*$$ [1])

und ebenso

$$|\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi} | \mathfrak{e}^* + \frac{\partial}{\partial \eta} | \mathfrak{f}^* + \frac{\partial}{\partial \zeta} | \mathfrak{g}^* = \frac{1}{\mathfrak{efg}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{fg} + \frac{\partial}{\partial \eta}\mathfrak{ge} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathfrak{ef}\right).$$

Dann muss aber diese Form des Operators ebenso gut auch auf ein Vektorfeld

[1]) Insbesondere ist daher $\nabla\xi = \mathfrak{e}^*$, $\nabla\eta = \mathfrak{f}^*$, $\nabla\zeta = \mathfrak{g}^*$.

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_2\mathfrak{b} + \mathfrak{p}_3\mathfrak{c}$$

oder ein Plangrössenfeld

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{f}_2\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}_3\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

angewendet werden können. Denn die äussere Multiplikation mit ∇ und $| \nabla$ kommt auf die Bildung von Gradienten $\nabla \mathrm{p}$ und ihren Ergänzungen $| \nabla \mathrm{p}$ hinaus, z. B. $\nabla \mathfrak{p} = \nabla \mathrm{p}_1 \mathfrak{a} + \nabla \mathrm{p}_2 \mathfrak{b} + \nabla \mathrm{p}_3 \mathfrak{c}$.

Wenn man dabei $\mathfrak{p}$ auf die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{F}$ auf die Plangrössen $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ bezieht, so ist bei der Anwendung des Operators ∇ oder $| \nabla$ nur zu beachten, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ keine festen Vektoren und Plangrössen sind, sondern vom Ort abhängen und daher auch mit differenziert werden müssen.

In den drei Formeln

$$\int \mathrm{f}\, d\mathfrak{S} + \int \mathrm{f} \,|\, \nabla d\tau = 0$$

$$\int \mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{p} \,|\, \nabla d\tau = 0$$

$$\int \mathfrak{F}\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{F} \,|\, \nabla d\tau = 0$$

lassen sich die räumlichen Integrale also auch mit krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ ausführen. Man braucht nur für das Raumelement $d\tau$ das äussere Produkt der drei Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \xi} d\xi$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \eta} d\eta$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \zeta} d\zeta$, d. h. $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\, d\xi d\eta d\zeta$ und für $| \nabla$ den Operator $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta}$, d. h. für $| \nabla d\tau$

$$\left(\mathfrak{f}\mathfrak{g} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathfrak{g}\mathfrak{e} \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathfrak{e}\mathfrak{f} \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) d\xi d\eta d\zeta$$

einzusetzen.

Grenzt man ein Gebiet ab durch drei Flächenpaare ξ und $\xi + \Delta\xi$, η und $\eta + \Delta\eta$, ζ und $\zeta + \Delta\zeta$, so wird bis auf Glieder höherer Ordnung

$$-\int d\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial \mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{g}\mathfrak{e}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{e}\mathfrak{f}}{\partial \zeta}\right) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta.$$

Denn für die beiden Flächen ξ und $\xi + \Delta\xi$ hat man

$$\int d\mathfrak{S} = \int [(\mathfrak{f}\mathfrak{g})_\xi - (\mathfrak{f}\mathfrak{g})_{\xi + \Delta\xi}]\, d\eta d\zeta$$

oder

$$-\int d\mathfrak{S} = \int \frac{\partial \mathfrak{fg}}{\partial \xi} d\eta d\zeta \Delta\xi + \text{höhere Ordnung}$$
$$= \frac{\partial \mathfrak{fg}}{\partial \xi} \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta + \text{höhere Ordnung.}$$

Da nun $\int d\mathfrak{S}$ über die Begrenzung eines beliebigen Raumes erstreckt Null ist, so folgt, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{fg}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{ge}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{ef}}{\partial \zeta} = 0.$$

Denn wäre es von Null verschieden, so müsste für hinreichend kleine Werte von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ auch $\int d\mathfrak{S}$ von Null verschieden sein.

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die Grössen $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ auch noch in andere Form bringen. Wir addieren zu $f \mid \nabla$, $\mathfrak{p} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ die verschwindende Grösse

$$\frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(\frac{\partial \mathfrak{fg}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{ge}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{ef}}{\partial \zeta} \right)$$

multipliziert mit f oder $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{F}$ hinzu und erhalten so

$$f \mid \nabla = \frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(\mathfrak{fg} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \mathfrak{ge} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathfrak{ef} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(f \frac{\partial \mathfrak{fg}}{\partial \xi} + f \frac{\partial \mathfrak{ge}}{\partial \eta} + f \frac{\partial \mathfrak{ef}}{\partial \zeta} \right)$$

oder

$$f \mid \nabla = \frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(\frac{\partial f\mathfrak{fg}}{\partial \xi} + \frac{\partial f\mathfrak{ge}}{\partial \eta} + \frac{\partial f\mathfrak{ef}}{\partial \zeta} \right)$$

und die analogen Formeln

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(\frac{\partial \mathfrak{p}\mathfrak{fg}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{p}\mathfrak{ge}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{p}\mathfrak{ef}}{\partial \zeta} \right)$$
$$\mathfrak{F} \mid \nabla = \frac{1}{\mathfrak{efg}} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}\mathfrak{fg}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{F}\mathfrak{ge}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{F}\mathfrak{ef}}{\partial \zeta} \right)$$

unter $\mathfrak{F}\mathfrak{fg}$ usw. den Vektor verstanden, der das äussere Produkt der Plangrössen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{fg}$ bildet, oder in anderer Schreibweise

$$\mathfrak{F}\mathfrak{fg} = \mid \mathfrak{F} \times \mid \mathfrak{fg} = (\mathfrak{efg}) \mid \mathfrak{F} \times \mathfrak{e}^*.$$

Man nennt, wie oben schon bemerkt wurde, die Ergänzung von $f \mid \nabla$ den Gradienten der skalaren Funktion f, ferner $\mathfrak{p} \mid \nabla$ die Divergenz des Vektorfeldes $\mathfrak{p}$, $- \mathfrak{F} \mid \nabla$ die Rotation des Vektorfeldes

| $\mathfrak{F}$. Hier haben wir also den Weg angegeben, um Gradient, Divergenz und Rotation auch für krummlinige Koordinaten auszudrücken.

Als Beispiel wollen wir räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ betrachten, für die

$$\mathfrak{r} = r \sin\vartheta \cos\varphi\, \mathfrak{i} + r \sin\vartheta \sin\varphi\, \mathfrak{j} + r \cos\vartheta\, \mathfrak{k}$$

geschrieben werden kann. Daraus ergeben sich

$$\mathfrak{e} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{dr} = \sin\vartheta \cos\varphi\, \mathfrak{i} + \sin\vartheta \sin\varphi\, \mathfrak{j} + \cos\vartheta\, \mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta} = r \cos\vartheta \cos\varphi\, \mathfrak{i} + r \cos\vartheta \sin\varphi\, \mathfrak{j} - r \sin\vartheta\, \mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varphi} = - r \sin\vartheta \sin\varphi\, \mathfrak{i} + r \sin\vartheta \cos\varphi\, \mathfrak{j}$$

$$d\mathfrak{r} = dr\,\mathfrak{e} + d\vartheta\,\mathfrak{f} + d\varphi\,\mathfrak{g}$$

$$d\mathfrak{r} . d\mathfrak{r} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Denn $\mathfrak{e}.\mathfrak{e} = 1$, $\mathfrak{f}.\mathfrak{f} = r^2$, $\mathfrak{g}.\mathfrak{g} = r^2 \sin^2\vartheta$, $\mathfrak{f}.\mathfrak{g} = \mathfrak{g}.\mathfrak{e} = \mathfrak{e}.\mathfrak{f} = 0$ und damit

$$\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g} = r^2 \sin\vartheta$$

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{e}.\mathfrak{e})\,\mathfrak{e}^* + (\mathfrak{e}.\mathfrak{f})\,\mathfrak{f}^* + (\mathfrak{e}.\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}^* = \mathfrak{e}^*$$

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}.\mathfrak{e})\,\mathfrak{e}^* + (\mathfrak{f}.\mathfrak{f})\,\mathfrak{f}^* + (\mathfrak{f}.\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}^* = r^2 \mathfrak{f}^*$$

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}.\mathfrak{e})\,\mathfrak{e}^* + (\mathfrak{g}.\mathfrak{f})\,\mathfrak{f}^* + (\mathfrak{g}.\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}^* = r^2 \sin^2\vartheta\, \mathfrak{g}^*$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\,\mathfrak{e}^* + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{f}^* + \frac{\partial}{\partial \varphi}\,\mathfrak{g}^* = \frac{\partial}{\partial r}\,\mathfrak{e} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{f} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\,\mathfrak{g}$$

$$| \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}\,\mathfrak{f}\mathfrak{g} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{g}\mathfrak{e} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\,\mathfrak{e}\mathfrak{f}\right) \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}.$$

Der Gradient einer skalaren Funktion f ist für räumliche Polarkoordinaten also gleich

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathfrak{e} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,\mathfrak{f} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathfrak{g}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathfrak{p}$ wird, wenn

$$\mathfrak{p} = u\,\mathfrak{e} + v\,\mathfrak{f} + w\,\mathfrak{g}$$

am bequemsten durch die Form

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \frac{1}{\mathfrak{efg}}\left(\frac{\partial \mathfrak{pfg}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{pge}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{pef}}{\partial \zeta}\right)$$

berechnet. Es ist

$$\mathfrak{pfg} = \mathrm{u}\mathfrak{efg},\ \mathfrak{pge} = \mathrm{v}\mathfrak{efg},\ \mathfrak{pef} = \mathrm{w}\mathfrak{efg}$$

und daher, wenn $\mathfrak{efg} = \omega$ geschrieben wird,

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \omega \mathrm{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega \mathrm{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega \mathrm{w}}{\partial \zeta}\right) = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \zeta} +$$

$$\frac{\mathrm{u}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\mathrm{v}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\mathrm{w}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}.$$

Wendet man den Operator $\mid \nabla$ unmittelbar auf $\mathfrak{p}$ an, so ergibt sich

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \zeta} + \mathrm{u}(\mathfrak{e} \mid \nabla) + \mathrm{v}(\mathfrak{f} \mid \nabla) + \mathrm{w}(\mathfrak{g} \mid \nabla)$$

und da dasselbe herauskommen muss, wie im ersten Fall, so schliessen wir daraus, dass

$$\frac{\mathrm{u}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\mathrm{v}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\mathrm{w}}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = \mathrm{u}(\mathfrak{e} \mid \nabla) + \mathrm{v}(\mathfrak{f} \mid \nabla) + \mathrm{w}(\mathfrak{g} \mid \nabla)$$

sein muss. Da u, v, w nun aber willkürliche Funktionen von ξ, η, ζ sind, so folgt, dass

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \mathfrak{e} \mid \nabla,\ \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \mathfrak{f} \mid \nabla,\ \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = \mathfrak{g} \mid \nabla,$$

d. h. der Gradient von $\log \omega$ ist gleich

$$\nabla \log \omega = (\mathfrak{e} \mid \nabla)\mathfrak{e}^* + (\mathfrak{f} \mid \nabla)\mathfrak{f}^* + (\mathfrak{g} \mid \nabla)\mathfrak{g}^*.$$

Man kann dies auch unmittelbar einsehen, indem man das äussere Produkt

$$\omega = \mathfrak{efg}$$

differenziert.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \xi}\mathfrak{fg} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi}\mathfrak{ge} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi}\mathfrak{ef}.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \eta},\ \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \eta}$$

$$\mathfrak{g} = \frac{d\mathfrak{r}}{\partial \zeta},\ \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \zeta \partial \zeta} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \zeta}$$

und somit

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \xi}\mathfrak{f}\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \eta}\mathfrak{g}\mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial \zeta}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$$

und daraus durch Division mit ω

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial \xi} = \mathfrak{e} \mid \nabla$$

und analog für η und ζ.

Stehen $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ rechtwinklig aufeinander, so wird es von den mathematischen Schriftstellern in der Regel vorgezogen, die Vektoren statt auf $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ auf Vektoren zu beziehen, die den $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ parallel, aber von der Länge Eins sind

$$\frac{\mathfrak{e}}{\sqrt{\mathfrak{e}.\mathfrak{e}}}, \frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}}, \frac{\mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{g}.\mathfrak{g}}}.$$

An Stelle der Masszahlen u, v, w des Vektors

$$\mathfrak{p} = u\mathfrak{e} + v\mathfrak{f} + w\mathfrak{g}$$

werden dann $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$$\mathfrak{p} = \bar{u}\frac{\mathfrak{e}}{\sqrt{\mathfrak{e}.\mathfrak{e}}} + \bar{v}\frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}} + \bar{w}\frac{\mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{g}.\mathfrak{g}}}$$

$\bar{u} = u\sqrt{\mathfrak{e}.\mathfrak{e}}$, $\bar{v} = v\sqrt{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}$, $\bar{w} = w\sqrt{\mathfrak{g}.\mathfrak{g}}$ eingeführt. Bei räumlichen Polarkoordinaten z. B. bezieht man sich auf die Vektoren $\mathfrak{e}, \frac{\mathfrak{f}}{r}, \frac{\mathfrak{g}}{r \sin \vartheta}$. Die Masszahlen des Gradienten

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathfrak{g}^* \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathfrak{e} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathfrak{f} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathfrak{g} = \frac{\partial f}{\partial r}\mathfrak{e} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\mathfrak{f}}{r} + \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\mathfrak{g}}{r \sin \vartheta}\end{aligned}$$

werden dann

$$\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

und die Divergenz

$$\mathfrak{p} \mid \nabla = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta}\left(\frac{\partial r^2 \sin \vartheta\, u}{\partial r} + \frac{\partial r^2 \sin \vartheta\, v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial r^2 \sin \vartheta\, w}{\partial \varphi}\right)$$

schreibt sich

$$\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left(\frac{\partial r^2 \sin\vartheta\, u}{\partial r} + \frac{\partial r \sin\vartheta\, \overline{v}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial r \overline{w}}{\partial\varphi}\right).$$

Die Symmetrie der Formel wird dadurch freilich gestört.

Die Divergenz des Gradienten einer skalaren Funktion schreibt sich $\nabla f \mid \nabla$ und wird demnach

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \nabla f \mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\partial\xi} + \frac{\partial \nabla f \mathfrak{g}\mathfrak{e}}{\partial\eta} + \frac{\partial \nabla f \mathfrak{e}\mathfrak{f}}{\partial\zeta}\right)$$

wo

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\xi}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial f}{\partial\eta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial f}{\partial\zeta}\mathfrak{g}^* .$$

Hierin hat man die $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ durch die $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ auszudrücken

$$\mathfrak{e}^* = (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{e}^*)\mathfrak{e} + (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{f}^*)\mathfrak{f} + (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{g}^*)\mathfrak{g}$$

usw.

und findet

$$\nabla f = u\mathfrak{e} + v\mathfrak{f} + w\mathfrak{g},$$

wo

$$u = (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{e}^*)\frac{\partial f}{\partial\xi} + (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{f}^*)\frac{\partial f}{\partial\eta} + (\mathfrak{e}^*.\mathfrak{g}^*)\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

usw.

Dann ist

$$\nabla f \mid \nabla = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \omega u}{\partial\xi} + \frac{\partial\omega v}{\partial\eta} + \frac{\partial\omega w}{\partial\zeta}\right).$$

Sind z. B. $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ aufeinander senkrecht, so ist

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{e}.\mathfrak{e})\mathfrak{e}^*,\ \mathfrak{f} = (\mathfrak{f}.\mathfrak{f})\mathfrak{f}^*,\ \mathfrak{g} = (\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g})\mathfrak{g}^*$$

und daher

$$\omega u = \frac{\omega}{\mathfrak{e}.\mathfrak{e}}\frac{\partial f}{\partial\xi},\ \omega v = \frac{\omega}{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}\frac{\partial f}{\partial\eta},\ \omega w = \frac{\omega}{\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g}}\frac{\partial f}{\partial\zeta}.$$

Für räumliche Polarkoordinaten z. B. hat man demnach

$$\nabla f \mid \nabla = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(r\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right],$$

für Zylinderkoordinaten

$$\mathfrak{r} = r\cos\varphi\,\mathfrak{i} + r\sin\varphi\,\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{e} = \cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j},\ \mathfrak{f} = -r\sin\varphi\,\mathfrak{i} + r\cos\varphi\,\mathfrak{j},\ \mathfrak{g} = \mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g} = r$$

$$\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e} = 1,\ \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} = r^2,\ \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g} = 1,\ \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{f} = 0$$

wird

$$\nabla f \mid \nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Die Rotation des Vektorfeldes $\mid \mathfrak{F}$ berechnet man aus den Masszahlen von $\mathfrak{F}$ in bezug auf $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{F} = f_1\,\mathfrak{f}\mathfrak{g} + f_2\,\mathfrak{g}\mathfrak{e} + f_3\,\mathfrak{e}\mathfrak{f}$$

$$\mid \mathfrak{F} = \omega f_1 \mathfrak{e}^* + \omega f_2 \mathfrak{f}^* + \omega f_3 \mathfrak{g}^*$$

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\omega f_3 \mathfrak{f} - \omega f_2 \mathfrak{g}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\omega f_1 \mathfrak{g} - \omega f_3 \mathfrak{e}) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\omega f_2 \mathfrak{e} - \omega f_1 \mathfrak{f})\right].$$

§ 12. Regeln für den Operator ∇.

Der Gebrauch des Operators ∇ unterliegt einer Reihe von Regeln, die wir hier zusammenstellen wollen:

(1) $$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g,$$

wo statt der skalaren Funktionen f und g auch zwei Vektoren oder zwei Plangrössen gesetzt und die Produkte mit ∇ als äussere Produkte aufgefasst werden. Wenn f und g skalare Funktionen sind, so haben wir eine Vektorgleichung, wenn Vektoren dafür eingesetzt werden, so haben wir eine Gleichung zwischen Plangrössen, und wenn Plangrössen eingesetzt werden, so ist es eine Gleichung zwischen skalaren Grössen. Die Regel bleibt auch bestehen, wenn an Stelle von ∇ die Ergänzung $\mid \nabla$ gesetzt wird und auch wenn die Faktoren auf beiden Seiten vertauscht werden

$$(f + g) \mid \nabla = f \mid \nabla + g \mid \nabla.$$

Sie bleibt ebenfalls richtig, wenn links und rechts die Ergänzungen der Produkte genommen werden. So folgt z. B. aus

$$\nabla(\mathfrak{f} + \mathfrak{g}) = \nabla \mathfrak{f} + \nabla \mathfrak{g},$$

dadurch dass man die Ergänzungen nimmt

$$\nabla \times (\mathfrak{f} + \mathfrak{g}) = \nabla \times \mathfrak{f} + \nabla \times \mathfrak{g}.$$

Ferner

(2) $$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g).$$

Diese Formel bleibt richtig, wenn man für die skalare Funktion g einen Vektor oder eine Plangrösse einsetzt und die Produkte der Vektoren oder Plangrössen mit dem als Vektor betrachteten Operator ∇ als äussere Produkte auffasst. Man beachte indessen wohl, dass die Formel nicht mehr richtig ist, wenn für f ein Vektor $\mathfrak{f}$ eingesetzt wird, während g eine skalare Funktion bleibt. Dann lautet die richtige Formel

$$\nabla(\mathfrak{f}g) = (\nabla\mathfrak{f})g - \mathfrak{f}(\nabla g),$$

die man aus

$$\nabla(f\mathfrak{g}) = (\nabla f)\mathfrak{g} + f(\nabla\mathfrak{g})$$

unmittelbar ableiten kann, wenn man in dieser Gleichung f durch g und $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{f}$ ersetzt. Sie geht dann über in

$$\nabla(g\mathfrak{f}) = (\nabla g)\mathfrak{f} + g(\nabla\mathfrak{f}).$$

Auf der linken Seite kann man $g\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{f}g$ verwandeln und auf der rechten Seite $g(\nabla\mathfrak{f})$ in $(\nabla\mathfrak{f})g$, aber $(\nabla g)\mathfrak{f}$ ändert das Vorzeichen, wenn man die beiden Faktoren miteinander vertauscht. Man kann das Minuszeichen auch so verstehen, dass in dem zweiten Gliede der rechten Seite von

$$\nabla(\mathfrak{f}g) = (\nabla\mathfrak{f})g - \mathfrak{f}(\nabla g)$$

die Reihenfolge der Vektoren ∇ und $\mathfrak{f}$ vertauscht ist, was durch das Minuszeichen wieder kompensiert wird.

Auch wenn für f und g zwei Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ eingesetzt werden, bleibt die Formel richtig; aber auch hier ist auf der rechten Seite das Minuszeichen zu setzen

$$\nabla(\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = (\nabla\mathfrak{f})\mathfrak{g} - \mathfrak{f}(\nabla\mathfrak{g}).$$

Von den vier Gleichungen (2), die wir im ganzen gewinnen, ist die ursprüngliche, wo f und g skalare Funktionen sind, eine Vektorgleichung; die zweite, wo für g ein Vektor eingesetzt wird, ist eine Plangrössengleichung. Die anderen beiden endlich, wo für g eine Plangrösse und die, wo für f und g zwei Vektoren eingesetzt werden, sind skalare Gleichungen.

Die Plangrössengleichung

$$\nabla(f\mathfrak{g}) = (\nabla f)\mathfrak{g} + f(\nabla\mathfrak{g})$$

können wir durch Übergang zur Ergänzung, indem wir das vektorielle Produkt einführen, auch schreiben

$$\nabla \times (\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = (\nabla \mathfrak{f}) \times \mathfrak{g} + \mathfrak{f}(\nabla \times \mathfrak{g}).$$

Ebenso können wir die beiden skalaren Gleichungen

$$\nabla(\mathfrak{f}\mathfrak{G}) = (\nabla \mathfrak{f})\mathfrak{G} + \mathfrak{f}(\nabla \mathfrak{G})$$

und

$$\nabla(\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = (\nabla \mathfrak{f})\mathfrak{g} - \mathfrak{f}(\nabla \mathfrak{g})$$

durch Einführung der Ergänzung von $\mathfrak{G}$ (die mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet werde) und des skalaren Produktes in der Form schreiben

$$\nabla \cdot (\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = (\nabla \mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{g} + \mathfrak{f}(\nabla \cdot \mathfrak{g})$$

und

$$\nabla \cdot (\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}) = (\nabla \times \mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{g} - \mathfrak{f} \cdot (\nabla \times \mathfrak{g}),$$

indessen tritt dadurch die Analogie in allen vier Gleichungen nicht so deutlich hervor.

Statt des als Vektor zu behandelnden Operators ∇ können wir auch die Ergänzung einführen, den als Plangrösse zu behandelnden Operator $| \nabla$. Wir bekommen dann ebenfalls eine Gleichung für das Produkt der skalaren Funktionen f und g und drei daraus abgeleitete Gleichungen, in denen für einen der Faktoren ein Vektor oder eine Plangrösse und eine Gleichung, in der für f sowohl wie für g eine Plangrösse gesetzt ist. Der wesentliche Inhalt dieser vier Gleichungen liefert aber nichts Neues, wovon man sich leicht überzeugt.

Eine dritte Eigenschaft des Operators ∇ erhalten wir durch äussere Multiplikation der beiden Operatoren ∇ und $| \nabla$. Da der eine Operator als Vektor, der andere als Plangrösse zu behandeln ist, so wird ihr äusseres Produkt ein skalarer Operator

$$\nabla \,|\, \nabla = \nabla \cdot \nabla.$$

Auf eine skalare Funktion f angewendet, ergibt er die Divergenz des Gradienten von f. Man pflegt diesen Operator mit dem griechischen Buchstaben Delta

$$\Delta$$

zu bezeichnen. Auf ein zu sich selbst reziprokes System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezogen ist

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Auf ein beliebiges System von festen oder veränderlichen Vektoren bezogen, haben wir, wenn der Ortsvektor $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{r} = \xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{f} + \zeta\mathfrak{g}$$

ist, wie schon oben abgeleitet wurde

$$\Delta \mathrm{f} = \nabla \mathrm{f} \mid \nabla = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \omega \mathrm{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega \mathrm{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega \mathrm{w}}{\partial \zeta}\right),$$

wo u, v, w durch die Gleichung

$$\nabla \mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \xi}\mathfrak{e}^* + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \eta}\mathfrak{f}^* + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \zeta}\mathfrak{g}^* = \mathrm{u}\mathfrak{e} + \mathrm{v}\mathfrak{f} + \mathrm{w}\mathfrak{g}$$

definiert waren. Man erhält also den Ausdruck für den skalaren Operator in den Veränderlichen ξ, η, ζ, wenn man in dem Ausdruck für $\Delta \mathrm{f}$ den Buchstaben f, wo er in u, v, w vorkommt, fortlässt.

Durch den Operator $\Delta = \nabla \mid \nabla = \nabla . \nabla$ wird aus einer beliebigen Ortsfunktion f eine neue Ortsfunktion $\Delta \mathrm{f}$ erzeugt. Wir werden weiter unten die Frage behandeln, ob man auch umgekehrt zu einer skalaren Funktion f gelangen kann, wenn man für $\Delta \mathrm{f}$ eine beliebige Ortsfunktion vorschreibt.

Wird der Operator Δ auf ein Vektorfeld $\mathfrak{s}$ angewendet, so ist zu beachten, dass wir $\Delta\mathfrak{s}$ nicht gleich

$$(\nabla\mathfrak{s}) \mid \nabla$$

setzen dürfen. $\nabla\mathfrak{s}$ ist eine Plangrösse und $\mid \nabla$ ist auch als Plangrösse zu behandeln. Nach der Analogie der oben abgeleiteten Formel

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}) \times \mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p})\mathfrak{q} - (\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p})\mathfrak{p}$$

erhalten wir hier

$$(\nabla\mathfrak{s}) \mid \nabla = (\nabla \mid \nabla)\mathfrak{s} - (\mathfrak{s} \mid \nabla)\nabla$$

oder

$$\Delta\mathfrak{s} = (\nabla \mid \nabla)\mathfrak{s} = (\nabla\mathfrak{s}) \mid \nabla + \nabla(\mathfrak{s} \mid \nabla).$$

Auf den Vektor $\mathfrak{s}$ angewendet, liefert also der Operator $\Delta = \nabla \mid \nabla$ die Summe zweier Vektorfelder, die beide vom Koordinatensystem unabhängig sind. Das eine wird durch das äussere Produkt der beiden Plangrössen $\nabla\mathfrak{s}$ und $\mid \nabla$ gebildet und lässt sich auch als vektorielles Produkt schreiben

$$(\nabla \times \mathfrak{s}) \times \nabla,$$

das andere ist der Gradient der Divergenz $\mathfrak{s} \mid \nabla$ des Vektorfeldes

8. Der Fall, wo der Operator Δ auf eine Plangrösse angewendet wird, möge auf den eines Vektors zurückgeführt werden, indem man die Ergänzung einführt. Da Δ skalar ist, so ist die Ergänzung von $\Delta\mathfrak{F}$ auch gleich dem Ergebnis des auf die Ergänzung von $\mathfrak{F}$ angewendeten Operators.

§ 13. Anwendung auf das Gravitationspotential.

Das Potential der Gravitation von Materie, die mit endlicher Dichte über den Raum verteilt ist, lässt sich in der Form eines räumlichen Integrals darstellen

$$-\int \frac{\varrho}{r}\, d\tau,$$

wo $d\tau$ ein Volumelement, ϱ die Dichte an der betreffenden Stelle und r die Entfernung dieser Stelle von dem Punkt P, für den das Potential berechnet werden soll. Die Gravitationskonstante ist dabei gleich 1 gesetzt. Das Integral ist über alle Raumteile zu erstrecken, wo sich Materie befindet. Wir wollen annehmen, dass sie auf einen endlichen Teil des Raumes beschränkt ist. Das Integral

$$\int \frac{\varrho}{r}\, d\tau$$

werde mit f bezeichnet. f ist also eine skalare Ortsfunktion und — f ist das Gravitationspotential im Punkte P. Wird der Punkt P, in dem wir uns die Masseneinheit konzentriert denken, um $d\mathfrak{r}$ verschoben, so ist die Änderung des Potentials gleich dem skalaren Produkt

$$-\nabla f . d\mathfrak{r}.$$

Das Vorzeichen dieses Ausdrucks bedeutet, wenn es positiv ist, dass Arbeit aufgewendet wird, um die Verschiebung gegen die Anziehung zu bewirken; wenn es negativ ist, dass Arbeit bei der Verschiebung gewonnen wird. Das Kraftfeld ist daher durch

$$\nabla f$$

gegeben.

Für f setzen wir seinen Wert ein und erhalten

$$\nabla f = \int \varrho \nabla \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\int \varrho \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\, d\tau,$$

wo $\mathfrak{r}$ den Vektor bedeutet, der von dem materiellen Teilchen $\varrho\, d\tau$ zu dem betrachteten Punkte hinführt. Denn der Gradient ∇f setzt sich aus der Summe der Gradienten jedes einzelnen Elements $\frac{\varrho}{r}\, d\tau$ zusammen, und um den Gradienten hiervon zu bilden, hat man, da $\varrho\, d\tau$ konstant ist, nur $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r$ zu bilden. Aber ∇r hat die Richtung von $\mathfrak{r}$ und die Länge Eins und ist daher gleich $\frac{\mathfrak{r}}{r}$. Das Kraftfeld ist durch diese Formel sowohl für Punkte ausserhalb wie für Punkte innerhalb der Materie gegeben.

Wir integrieren nun den Vektor ∇f über die Begrenzung eines beliebigen Raumes und erhalten, indem wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen

$$\int \nabla f\, d\mathfrak{S} = -\int \varrho \left\{ \int \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}}{r^3} \right\} d\tau .$$

Das innere Integral ist dabei für jeden Punkt der anziehenden Materie auszuführen. Nun ist $\frac{1}{3}\, \mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}$ gleich dem Inhalt des Kegels, der seine Spitze in dem materiellen Teilchen und $d\mathfrak{S}$ zur Basis hat, negativ oder positiv gerechnet, je nachdem das Teilchen auf der positiven oder negativen Seite von $d\mathfrak{S}$ liegt. $\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}}{r^3}$ ist daher gleich dem Inhalt des auf die Länge Eins reduzierten Kegels positiv, wenn man von dem Teilchen aus auf die negative, d. h. nach aussen gekehrte Seite von $d\mathfrak{S}$ blickt. Liegt nun das Teilchen ausserhalb des Raumes, über den das Integral

$$\int \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}}{r^3}$$

erstreckt wird, so wird jeder unendlich schmale Kegel, der von ihm ausgeht, die Begrenzung des Raumes entweder überhaupt nicht oder in ebensovielen Elementen $d\mathfrak{S}$ von der einen wie von der anderen Art treffen, deren Beiträge sich somit aufheben werden. Das Integral wird daher in diesem Fall Null sein. Liegt das Teilchen dagegen im Inneren des Raumes, so wird jeder dieser Kegel die Begrenzung des Raumes entweder in einem negativ zu rech-

nenden Element $d\mathfrak{S}$ oder darüber hinaus noch in ebensoviel positiv wie negativ zu rechnenden Elementen $d\mathfrak{S}$ treffen. Daher wird der Gesamtwert des Integrals

$$\frac{1}{3}\int\frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{S}}{r^3}$$

in diesem Falle gleich dem mit dem negativen Zeichen genommenen Volumen der Kugel vom Radius Eins

$$\frac{1}{3}\int\frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{S}}{r^3}=-\frac{4}{3}\pi.$$

Setzen wir diesen Wert des inneren Integrals ein, so wird

$$\int\nabla \mathrm{f}\,d\mathfrak{S}=4\pi\int\varrho\,d\tau,$$

wo rechts nur die materiellen Teilchen im Integral zählen, die im Innern des Raumes liegen, über dessen Begrenzung das Integral der linken Seite erstreckt wird. Mit anderen Worten

$$\frac{1}{4\pi}\int\nabla \mathrm{f}\,d\mathfrak{S}$$

ist gleich der Materie, die in dem Raume liegt, über dessen Begrenzung integriert wird.

Verwandelt man das Integral nach Formel (3) § 8 in ein Raumintegral, so ist also auch

$$-\frac{1}{4\pi}\int\Delta \mathrm{f}\,d\tau=\int\varrho\,d\tau,$$

wo beide Integrale über denselben beliebig gewählten Raum erstreckt werden. Mithin ist

$$-\frac{\Delta \mathrm{f}}{4\pi}=\varrho.$$

Denn wäre an irgendeiner Stelle $-\frac{\Delta \mathrm{f}}{4\pi}$ von ϱ verschieden, so könnte man den Integrationsraum so einschränken, dass auch die Integrale über die beiden Grössen voneinander verschieden wären. Überall, wo $\varrho=0$ ist, muss auch $\Delta \mathrm{f}=0$ sein.

Die skalare Funktion

$$\mathrm{f}=\int\frac{\varrho}{r}\,d\tau$$

führt also durch die Divergenz des von ihrem Gradienten gebildeten

Vektorfeldes auf eine skalare Funktion, die sich von der Dichte ϱ nur um den konstanten Faktor -4π unterscheidet.

Dieses physikalische Bild lehrt uns auf anschaulichem Wege das mathematisch schon erkannte Resultat, dass $\Delta \mathrm{f}$ eine skalare Ortsfunktion ist. Aber es lehrt noch mehr. Es zeigt uns nämlich, wie man auch umgekehrt, wenn $\Delta \mathrm{f}$ als Ortsfunktion gegeben ist, eine skalare Funktion f dazu finden kann. Man braucht sich nur eine Materie über den Raum verteilt zu denken, deren Dichte ϱ gleich

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta \mathrm{f}$$

angenommen wird. Wir binden uns dabei nicht daran, dass ϱ positiv sein soll. Negative Werte von ϱ bedeuten uns dann Materie, die andere Materie mit positiver Dichte nicht anzieht, sondern abstösst. Mit dieser Ortsfunktion ϱ wird jetzt die skalare Funktion f

$$\mathrm{f} = \int \frac{\varrho}{\mathrm{r}}\, d\tau$$

gebildet.

Freilich gibt uns das physikalische Bild keine Antwort auf die Frage, ob es etwa noch andere Ortsfunktionen $\bar{\mathrm{f}}$ geben könnte, für die $\Delta \bar{\mathrm{f}}$ die gleiche Ortsfunktion wäre wie $\Delta \mathrm{f}$. Ein zu f hinzutretendes skalares Produkt $\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{a}$ des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ mit einem beliebigen konstanten Vektor $\mathfrak{a}$ würde dem Kraftfeld $\nabla \mathrm{f}$ nur den konstanten Vektor $\mathfrak{a}$ hinzufügen und daher an $\Delta \mathrm{f} = \nabla \mathrm{f} \mid \nabla$ nichts ändern, das ist auch physikalisch unmittelbar klar. Aber gibt es auch, abgesehen davon, noch weitere skalare Funktionen $\bar{\mathrm{f}}$?

Um diese Frage zu untersuchen, bilden wir die Differenz $\mathrm{u} = \bar{\mathrm{f}} - \mathrm{f}$ zweier skalaren Funktionen, die auf dasselbe ϱ führen. Dann muss $\nabla \mathrm{u} \mid \nabla$ im ganzen Raume verschwinden. Die Frage ist nun, was man daraus in bezug auf u schliessen kann.

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathrm{u}\nabla \mathrm{u}$.

Die Divergenz dieses Vektorfeldes $\mathrm{u}\nabla \mathrm{u} \mid \nabla$ oder, wie wir auch schreiben können, $\nabla \mid (\mathrm{u}\nabla \mathrm{u})$ oder $\nabla(\mathrm{u} \mid \nabla \mathrm{u})$ ist nach dem Obigen $\mathrm{u}\nabla \mathrm{u} \mid \nabla = \nabla(\mathrm{u} \mid \nabla \mathrm{u}) = \nabla \mathrm{u} \mid \nabla \mathrm{u} + \mathrm{u}(\nabla \mid \nabla \mathrm{u})$.

Nun soll $\nabla \mid \nabla \mathrm{u} = \nabla \mathrm{u} \mid \nabla = 0$ sein, also

$$\mathrm{u}\nabla \mathrm{u} \mid \nabla = \nabla \mathrm{u} \mid \nabla \mathrm{u}.$$

Nach der Formel (2), § 8 erhalten wir somit für das Raumintegral

über $\nabla u \mid \nabla u$, indem wir für den Vektor $\mathfrak{p}$ den Vektor $u \nabla u$ einsetzen,

$$\int \nabla u \mid \nabla u d\tau = \int (u \nabla u) \mid \nabla d\tau = -\int u \nabla u d\mathfrak{S}.$$

Erstrecken wir nun das Oberflächenintegral über die Oberfläche einer Kugel, die mit einem sehr grossen Radius l um einen Punkt O konstruiert wird, und setzen wir von f und $\bar{f}$ und damit auch von u voraus, dass sie mit wachsendem l von der Ordnung $1/l$ klein werden, so wird der numerische Wert von ∇u von der Ordnung $1/l^2$ und der von $u \nabla u$ mithin von der Ordnung $1/l^3$. Da aber die Oberfläche der Kugel von der Ordnung l^2 ist, so wird das Integral von der Ordnung $1/l$, d. h. mit wachsendem l beliebig klein. Daraus folgt, dass

$$\nabla u \mid \nabla u$$

im ganzen Raume Null sein muss. Denn als Quadrat des numerischen Wertes von ∇u kann es nirgends negativ sein. Wäre es also irgendwo von Null verschieden, so könnte das Raumintegral

$$\int \nabla u \mid \nabla u d\tau$$

über eine hinreichend grosse Kugel erstreckt, nicht beliebig klein werden. Aus $\nabla u \mid \nabla u = 0$ folgt $\nabla u = 0$ und daraus

$$du = \nabla u . d\mathfrak{r} = 0,$$

d. h. $u =$ konstant.

Wenn wir also verlangen, dass die gesuchte Funktion f in der Entfernung l wie $1/l$ klein werden soll, so gibt es eine und nur eine solche Funktion, für die Δf eine vorgeschriebene Ortsfunktion ist. Mit anderen Worten, unter dieser Einschränkung ist der Übergang von einer beliebigen Ortsfunktion f zu der Ortsfunktion Δf eindeutig umkehrbar, es ist

$$f = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta f}{r} d\tau.$$

§ 14. Der Greensche Satz.

Ist f eine skalare Funktion und $\mathfrak{p}$ ein Vektorfeld, so ist, wie wir oben fanden,

$$f\mathfrak{p} \mid \nabla = \nabla . f\mathfrak{p} = \nabla f . \mathfrak{p} + f \nabla . \mathfrak{p},$$

und daher nach dem Umwandlungstheorem Formel (2), § 8

$$\int \mathfrak{f}\mathfrak{p}\, d\mathfrak{S} + \int \nabla \mathfrak{f} . \mathfrak{p}\, d\tau + \int \mathfrak{f} \nabla . \mathfrak{p}\, d\tau = 0.$$

Hier möge nun für $\mathfrak{p}$ der Gradient einer skalaren Funktion g gesetzt werden, so ergibt sich

$$\int \mathfrak{f} \nabla \mathfrak{g}\, d\mathfrak{S} + \int \nabla \mathfrak{f} . \nabla \mathfrak{g}\, d\tau + \int \mathfrak{f} \Delta \mathfrak{g}\, d\tau = 0.$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung f und g und ziehen die neue Gleichung von der ursprünglichen ab, so erhalten wir

$$\int (\mathfrak{f} \nabla \mathfrak{g} - \mathfrak{g} \nabla \mathfrak{f})\, d\mathfrak{S} + \int (\mathfrak{f} \Delta \mathfrak{g} - \mathfrak{g} \Delta \mathfrak{f})\, d\tau = 0.$$

Dieses Theorem heisst der Greensche Satz.

Wir wollen von ihm eine Anwendung auf eine Funktion f machen, die in dem ganzen Integrationsgebiet der Bedingung

$$\Delta \mathfrak{f} = 0$$

genügt.

Es ist dann

$$\int (\mathfrak{f} \nabla \mathfrak{g} - \mathfrak{g} \nabla \mathfrak{f})\, d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{f} \Delta \mathfrak{g}\, d\tau = 0,$$

wo g beliebig bleibt.

Es sei nun die Aufgabe, f in irgendeinem Punkte P im Innern des Integrationsraumes zu berechnen, wenn f und $\nabla \mathfrak{f}$ auf der Begrenzung gegeben sind.

Zu dem Ende denken wir uns P in einen sehr kleinen Raum vom Volumen ε eingeschlossen und wählen $\Delta \mathfrak{g}$ so, dass es im Innern dieses kleinen Raumes den konstanten Wert $-4\pi\varrho$ habe, während es in den übrigen Punkten des Integrationsraumes verschwindet. Das Integral

$$\int \mathfrak{f} \Delta \mathfrak{g}\, d\tau$$

braucht dann nur über den kleinen Raum erstreckt zu werden und ergibt sich gleich

$$-4\pi\varrho \int \mathfrak{f}\, d\tau = -4\pi\varrho\varepsilon\bar{\mathfrak{f}},$$

wo $\bar{\mathfrak{f}}$ den Mittelwert von f in dem kleinen Raume bezeichnet.

Wird nun f als stetige Funktion des Ortes vorausgesetzt, so ist in

$$\int \mathfrak{f}\, d\tau = \bar{\mathfrak{f}}\varepsilon,$$

der Mittelwert $\bar{\mathfrak{f}}$ beliebig wenig von $\mathfrak{f}_P$ dem Werte von f im Punkte P verschieden, wenn ε hinreichend klein angenommen wird. Für g können wir nach dem Obigen

$$\int \frac{\varrho\, d\tau}{r}$$

setzen. Wir ziehen nun den kleinen Raum um den Punkt P zusammen, in dem wir zugleich ϱ so wachsen lassen, dass $\varrho\,\varepsilon = 1$ bleibt. Dann geht

$$\int f \Delta g\, d\tau$$

in

$$-4\pi f_P$$

und g in

$$\frac{1}{r}$$

über, wo r den Abstand vom Punkte P bedeutet, und damit erhalten wir

$$\int \left[f \nabla \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \nabla f \right] d\mathfrak{S} - 4\pi f_P = 0.$$

D. h. der Wert der Funktion f im Punkte P lässt sich durch ein Integral über die Begrenzung des ursprünglichen Integrationsraumes ausdrücken, das wir berechnen können, sobald f und ∇f auf der Begrenzung gegeben sind.

Würden wir g gleich

$$\frac{1}{r} + g_1$$

setzen, wo g_1 eine skalare Funktion ist, die in dem ganzen Integrationsraum der Bedingung

$$\Delta g_1 = 0$$

genügt, so würde

$$\int (f \nabla g - g \nabla f)\, d\mathfrak{S}$$

denselben Wert haben wie für $g = \frac{1}{r}$ und wir würden daher ebenso wie vorher den Wert f_P auch durch das Integral

$$f_P = \frac{1}{4\pi} \int (f \nabla g - g \nabla f)\, d\mathfrak{S}$$

berechnen können. Wir könnten Δg_1 dabei ausserhalb des Integrationsraumes irgendwelche Werte geben, wenn nur im Innern des Integrationsraumes $\Delta g_1 = 0$ bleibt.

Gelingt es, die Werte von Δg_1 ausserhalb des Integrations-

raumes so anzunehmen, dass auf seiner Begrenzung g konstant ist, so vereinfacht sich die Berechnung von $\mathfrak{f}_P$ und es wird

$$\mathfrak{f}_P = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{f}\nabla g\, d\mathfrak{S},$$

so dass die Werte von f allein auch ohne $\nabla \mathfrak{f}$ schon hinreichen, um die Berechnung von $\mathfrak{f}_P$ auszuführen. Denn der zweite Teil des Integrals wird

$$-\frac{g}{4\pi}\int \nabla \mathfrak{f}\, d\mathfrak{S},$$

und nach Formel 2, § 8, ist

$$-\int \nabla \mathfrak{f}\, d\mathfrak{S} = \int \Delta \mathfrak{f}\, d\tau,$$

was infolge der Bedingung $\Delta \mathfrak{f} = 0$ verschwindet.

Will man z. B. in einem Punkte P im Innern einer Kugel vom Radius a die Funktion f aus ihren Werten auf der Oberfläche der Kugel berechnen, so gelingt es auf folgende Weise die Funktion g zu bestimmen. Sei $\mathfrak{a}$ der Vektor, der vom Mittelpunkt M in der Richtung von P zu einem Punkte A der Kugeloberfläche führt und $\lambda\mathfrak{a}$ $(\lambda < 1)$ der Vektor, der vom Mittelpunkt bis zu P führt, so führt der Vektor $\frac{1}{\lambda}\mathfrak{a}$ über die Kugel hinaus bis Q (Fig. 27). Sei ferner $\mathfrak{b}$ der Vektor von M bis zu einem Punkte B der Kugeloberfläche, so ist

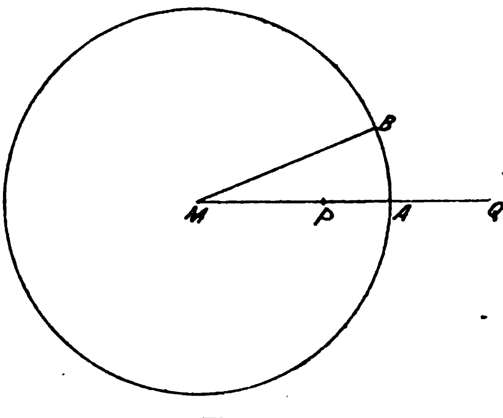


Fig. 27.

$$\overline{PB}^2 = (\mathfrak{b}-\lambda\mathfrak{a}).(\mathfrak{b}-\lambda\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.\mathfrak{a} - 2\lambda\mathfrak{a}.\mathfrak{b} + \lambda^2\mathfrak{a}.\mathfrak{a}$$

$$\overline{QB}^2 = \left(\mathfrak{b}-\frac{1}{\lambda}\mathfrak{a}\right)\cdot\left(\mathfrak{b}-\frac{1}{\lambda}\right) = \mathfrak{a}.\mathfrak{a} - \frac{2}{\lambda}\mathfrak{a}.\mathfrak{b} + \frac{1}{\lambda^2}\mathfrak{a}.\mathfrak{a},$$

da $\mathfrak{b}.\mathfrak{b} = \mathfrak{a}.\mathfrak{a}$ ist. Folglich ist

$$\overline{PB^2} = \lambda^2 \overline{QB^2}.$$

Setzen wir also

$$g = \frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda r_1},$$

wo r den Abstand von P, r_1 den Abstand von Q bedeutet, so wird g auf der Kugel verschwinden. ∇g stellt das Kraftfeld einer anziehenden Masse 1 in P und einer abstossenden Masse $1/\lambda$ in Q dar. Δg wird also überall ausser in den beiden Punkten selbst verschwinden und $-\Delta \frac{1}{\lambda r_1}$ wird überall im Innern der Kugel verschwinden.

Mithin ist
$$f_P = \frac{1}{4\pi} \int f \nabla g \, d\mathfrak{S}.$$

§ 15. Der Zusammenhang zwischen einem Vektorfelde und seinem Wirbel.

Wir haben oben den Übergang von einem beliebigen Vektorfelde $\mathfrak{f}$ zu dem Vektorfelde

$$\mathfrak{g} = \nabla \times \mathfrak{f}$$

dem Wirbel oder Rotor von $\mathfrak{f}$ betrachtet. Wir wollen jetzt umgekehrt untersuchen, ob zu einem gegebenen Vektorfelde $\mathfrak{g}$ ein Vektorfeld $\mathfrak{f}$ so gefunden werden kann, dass

$$\mathfrak{g} = \nabla \times \mathfrak{f}$$

ist. Zu dem Ende bilden wir

$$\mathfrak{g} \times \nabla = (\nabla \times \mathfrak{f}) \times \nabla = (\nabla \mid \nabla)\mathfrak{f} - \nabla(\mathfrak{f} \mid \nabla)$$

und legen dem gesuchten Vektorfelde $\mathfrak{f}$ zunächst die weitere Bedingung auf, dass seine Divergenz $\mathfrak{f} \mid \nabla$ Null sein soll.

Dann ist

$$\mathfrak{g} \times \nabla = (\nabla \mid \nabla)\mathfrak{f}.$$

Die oben abgeleitete skalare Gleichung

$$f = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\nabla \mid \nabla) f}{r} \, d\tau$$

lässt sich nun ohne weiteres zu der Vektorgleichung

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\nabla \mid \nabla)\mathfrak{f}}{r} \, d\tau$$

erweitern, da sie für jede Masszahl des Vektors gilt, wenn wir ihn aus drei festen Vektoren numerisch ableiten. Hierin setzen wir für $(\nabla \mid \nabla)\mathfrak{f}$ den Ausdruck $\mathfrak{g} \times \nabla$ ein und erhalten somit

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathfrak{g}}{r}\, d\tau.$$

Wenn das Vektorfeld $\mathfrak{f}$ die Bedingung nicht erfüllt, dass die Divergenz $\mathfrak{f} \mid \nabla$ verschwindet, wenn aber diese Divergenz bekannt ist, so bestimmen wir eine skalare Funktion u, so dass, wenn der Gradient von u zu $\mathfrak{f}$ hinzugefügt wird, die Divergenz des so entstehenden Feldes $\bar{\mathfrak{f}}$

$$\bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} + \nabla u$$

verschwindet

$$(\mathfrak{f} + \nabla u) \mid \nabla = 0 \text{ oder } \nabla u \mid \nabla = -\mathfrak{f} \mid \nabla,$$

also

$$u = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{f} \mid \nabla}{r}\, d\tau.$$

Dann kann $\bar{\mathfrak{f}}$, wie eben gezeigt, gefunden werden. Denn es ist

$$\mathfrak{g} = \nabla \times (\bar{\mathfrak{f}} - \nabla u) = \nabla \times \bar{\mathfrak{f}},$$

und somit

$$\bar{\mathfrak{f}} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathfrak{g}}{r}\, d\tau$$

und

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathfrak{g}}{r}\, d\tau - \nabla u.$$

Mit anderen Worten, wenn von einem Vektorfelde $\mathfrak{f}$ der Rotor $\mathfrak{g} = \nabla \times \mathfrak{f}$ und die Divergenz $\mathfrak{f} \mid \nabla$ gegeben ist, so lässt sich $\mathfrak{f}$ in der angegebenen Weise berechnen.

Es wurde schon oben erwähnt, dass, wenn $\mathfrak{f}$ der Geschwindigkeitsvektor einer inkompressibeln Flüssigkeit ist, der Rotor die doppelte Drehungsgeschwindigkeit darstellt. In diesem Falle ist die Divergenz von $\mathfrak{f}$ gleich Null und daher

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathfrak{g}}{r}\, d\tau.$$

Das Rotorfeld, das aus dem Geschwindigkeitsfeld durch die Operation $\nabla \times \mathfrak{f}$ gewonnen wird, bestimmt also auch umgekehrt das Geschwindigkeitsfeld. Und zwar wird $\mathfrak{f}$ in ähnlicher Weise aus

$\nabla \times \mathfrak{g}$, dem Rotor des Rotors abgeleitet, wie eine skalare Funktion aus der Divergenz des Feldes ihres Gradienten.

Wenn die Divergenz des Vektorfeldes $\mathfrak{f}$ nicht Null ist, so tritt bei der Ableitung von $\mathfrak{f}$ aus dem Rotor des Rotors noch ein Gradient hinzu, der sich aus der Divergenz von $\mathfrak{f}$ bestimmt.

§ 16. Skalares Potential, Vektorpotential und Plangrössenpotential.

Neben dem Integral

$$\int \frac{\varrho\, d\tau}{r}$$

durch das, wie oben gezeigt wurde, das Potential der Gravitation einer über den Raum verteilten Materie ausgedrückt wird, treten bei manchen Betrachtungen der Physik noch zwei andere auf, die gerade so gebildet sind, nur mit der Änderung, dass an Stelle der skalaren Funktion ϱ ein vom Ort des Elementes $d\tau$ abhängiger Vektor $\mathfrak{p}$ oder eine Plangrösse $\mathfrak{P}$ tritt. Es verlohnt sich die drei Integrale

$$f = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r}, \quad \mathfrak{f} = \int \frac{\mathfrak{p}\, d\tau}{r}, \quad \mathfrak{F} = \int \frac{\mathfrak{P}\, d\tau}{r}$$

gemeinsam zu behandeln. In allen dreien bedeutet r die Entfernung des Elementes $d\tau$ von einem Punkte A und alle drei sind Funktionen des Ortes von A, und zwar ist das erste eine skalare Ortsfunktion, das zweite ein Vektor, das dritte eine Plangrösse. In den drei Integralen ist aber nur r von dem Orte von A abhängig, ϱ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ dagegen hängen nur von dem Orte des Raumelementes $d\tau$, nicht von dem Orte von A ab. Aus den drei Integralen f, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ leiten wir drei neue Integrale $f \mid \nabla$, $\mathfrak{f} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ ab

$$f \mid \nabla = \int \varrho \left(\frac{1}{r} \mid \nabla\right) d\tau, \quad \mathfrak{f} \mid \nabla = \int \mathfrak{p} \left(\frac{1}{r} \mid \nabla\right) d\tau,$$

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = \int \mathfrak{P} \left(\frac{1}{r} \mid \nabla\right) d\tau,$$

wo für $\frac{1}{r} \mid \nabla$ auch die Ergänzung von

$$\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$$

geschrieben werden kann, wenn $\mathfrak{r}$ den Vektor bedeutet, der vom Punkte A zu dem Element $d\tau$ hinführt. $\mathfrak{f} \mid \nabla$ bedeutet somit die Ergänzung der Kraft $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K} = \int \frac{\varrho}{\mathrm{r}^2} \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{r}} d\tau,$$

mit der die im Punkte A gelegene Masseneinheit von der über den Raum verteilten Masse angezogen wird (dabei ist wie oben die Gravitationskonstante gleich 1 angenommen). Auch für $\mathfrak{f} \mid \nabla$ und $\mathfrak{F} \mid \nabla$ wollen wir zwei Beispiele physikalischer Bedeutungen anführen. Es ist

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{\mathrm{r}} \mid \nabla\right) = \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\mathrm{r}} \mid \nabla\right) = \frac{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3}.$$

Bezeichnen wir die Ergänzung von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{p}$, so können wir für $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{r}$ auch $\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}$ schreiben, so dass

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = \int \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3} d\tau, \quad \mathfrak{F} \mid \nabla = \int \frac{\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3} d\tau.$$

Ist $\mathfrak{p}\, d\tau$ das magnetische Moment des Elementes $d\tau$, so ist $-\frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3} d\tau$ sein magnetisches Potential im Punkte A, $-\mathfrak{f} \mid \nabla$ stellt also das magnetische Potential dar, wenn $\mathfrak{p}$ das auf die Volumeinheit berechnete über den Raum verteilte magnetische Moment bedeutet. $-\frac{\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3} d\tau$ ist die magnetische Feldstärke, die von einem stationären Stromelement $\mathfrak{p}\, d\tau$ im Punkte A hervorgerufen wird. $-\mathfrak{F} \mid \nabla$ stellt also die magnetische Feldstärke dar, wenn $\mathfrak{p}$ den auf die Volumeinheit berechneten elektrischen Strom bedeutet, der über den Raum verteilt ist.

Die Entfernung r kann sowohl als Ortsfunktion des Ortes von A wie als Ortsfunktion des Elementes $d\tau$ betrachtet werden. Im ersten Fall fanden wir

$$\frac{1}{\mathrm{r}} \mid \nabla = \mid \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3}.$$

Im zweiten Fall bezeichne $\overline{\nabla}$ den entsprechenden Operator. Dann ist

$$\frac{1}{\mathrm{r}} \mid \overline{\nabla} = - \mid \frac{\mathfrak{r}}{\mathrm{r}^3}.$$

Denn da die Endpunkte des Vektors $\mathfrak{r}$ ihre Rollen vertauschen,

wenn $\overline{\nabla}$ an Stelle von ∇ tritt, so ist $\mathfrak{r}$ in $-\mathfrak{r}$ zu verwandeln. Wir können also in den Integralen für $\mathfrak{f} \mid \nabla$, $\mathfrak{f} \mid \nabla$, $\mathfrak{F} \mid \nabla$ den Ausdruck $\frac{1}{r} \mid \nabla$ durch $-\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}$ ersetzen und haben

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = -\int \varrho\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) d\tau, \quad \mathfrak{f} \mid \nabla = -\int \mathfrak{p}\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) d\tau,$$

$$\mathfrak{F} \mid \nabla = -\int \mathfrak{P}\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) d\tau.$$

Nun ist $$\varrho\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) = \frac{\varrho}{r} \mid \overline{\nabla} - \frac{1}{r}(\varrho \mid \overline{\nabla})$$

und analog $$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) = \frac{\mathfrak{p}}{r} \mid \nabla - \frac{1}{r}(\mathfrak{p} \mid \overline{\nabla})$$

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{r} \mid \overline{\nabla}\right) = \frac{\mathfrak{P}}{r} \mid \overline{\nabla} - \frac{1}{r}(\mathfrak{P} \mid \overline{\nabla}).$$

Somit lässt sich jedes der Integrale als Differenz zweier schreiben, z. B.

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = \int \frac{\varrho \mid \overline{\nabla}}{r} d\tau - \int \frac{\varrho}{r} \mid \overline{\nabla}\, d\tau.$$

In den anderen beiden Fällen ist statt ϱ zu schreiben $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{P}$. Die Integrale beziehen sich auf den ganzen Raum. Wir wollen nun aber annehmen, dass, wenn über einen hinreichend grossen Raum integriert wird, eine beliebig genaue Annäherung erzielt wird. Das zweite Integral können wir dann nach den obigen Theoremen in ein Integral über die Begrenzung des Raumes verwandeln und finden z. B.

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = \int \frac{\varrho \mid \overline{\nabla}}{r} d\tau + \int \frac{\varrho}{r} d\mathfrak{S}.$$

Nun werde weiter angenommen, dass die Funktionen ϱ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ für einen hinreichend weit entfernten Ort so klein werden, dass die Oberflächenintegrale

$$\int \frac{\varrho}{r} d\mathfrak{S}, \quad \int \frac{\mathfrak{p}}{r} d\mathfrak{S}, \quad \int \frac{\mathfrak{P}}{r} d\mathfrak{S}$$

für einen hinreichend grossen Integrationsraum beliebig klein werden. Dazu ist nur erforderlich, dass ϱ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ in der Entfernung von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$ klein werden. Unter dieser Voraussetzung ist demnach:

$$\mathfrak{f} \mid \nabla = \int \frac{\varrho \mid \overline{\nabla}}{\mathfrak{r}} d\tau, \quad \mathfrak{f} \mid \nabla = \int \frac{\mathfrak{p} \mid \overline{\nabla}}{\mathfrak{r}} d\tau, \quad \mathfrak{F} \mid \nabla = \int \frac{\mathfrak{P} \mid \overline{\nabla}}{\mathfrak{r}} d\tau.$$

Jedes dieser drei Integrale kann also in doppelter Form dargestellt werden. Die zweite Form ist dieselbe wie die der Integrale $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ selbst, bei denen im Nenner die erste Potenz von $\mathfrak{r}$ im Zähler eine Ortsfunktion des Ortes des Elements $d\tau$ steht, die unabhängig ist von dem Orte von A. Die magnetische Feldstärke $-\mathfrak{F} \mid \nabla$ eines mit der Stromdichte $\mid \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ über den Raum sich verteilenden Stromes ist hiernach also auch in der Form

$$-\int \frac{\mathfrak{P} \mid \overline{\nabla}}{\mathfrak{r}} d\tau \text{ oder } \int \frac{\overline{\nabla} \times \mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} d\tau$$

darstellbar und das magnetische Potential in der Form

$$-\int \frac{\mathfrak{p} \mid \overline{\nabla}}{\mathfrak{r}} d\tau.$$

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ Ergänzungen voneinander, so sind auch die Integrale $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ Ergänzungen voneinander. Anstatt $\mathfrak{f} \mid \nabla$ kann man daher auch $\mid \mathfrak{F} \mid \nabla$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{F} \nabla$ oder auch $\nabla \mathfrak{F}$ schreiben, und anstatt $\mathfrak{F} \mid \nabla$ kann man die Ergänzung von $\mathfrak{f} \nabla$ oder was dasselbe ist $-\nabla \times \mathfrak{f}$ schreiben. Ebenso können wir unter dem Integralzeichen statt $\mathfrak{p} \mid \overline{\nabla}$ auch $\overline{\nabla} \mathfrak{P}$ und statt $\mathfrak{P} \mid \overline{\nabla}$ auch $-\nabla \times \mathfrak{p}$ schreiben und erhalten somit

$$\nabla \cdot \mathfrak{f} = \int \frac{\overline{\nabla} \cdot \mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} d\tau \text{ oder } \nabla \mathfrak{F} = \int \frac{\overline{\nabla} \mathfrak{P}}{\mathfrak{r}} d\tau \text{ und } \nabla \times \mathfrak{f} = \int \frac{\overline{\nabla} \times \mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} d\tau.$$

Kapitel III.

Tensoren.

§ 1. Die affine Transformation des Raumes.

Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebige voneinander unabhängige Vektoren, so dass sich ein beliebiger Vektor $\mathfrak{r}$ aus ihnen numerisch ableiten lässt

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}.$$

Wir wollen uns den Vektor $\mathfrak{r}$ von einem festen Punkt O bis zu einem veränderlichen Punkt R abgetragen denken, so dass die Mass-

zahlen x, y, z des Vektors zugleich die Koordinaten des Punktes R in Bezug auf die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind.

Nun denken wir uns eine Transformation des Raumes, bei der der Punkt O fest bleibt, während der Punkt R in einen neuen Punkt R′ übergeht. Dieser wird von O aus durch den Vektor

$$\mathfrak{r}' = x\mathfrak{e} + y\mathfrak{f} + z\mathfrak{g}$$

erreicht, der aus den drei numerisch voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, die im übrigen ganz beliebig sind, durch dieselben Masszahlen x, y, z abgeleitet wird, wie $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Wir nennen das eine affine Transformation des Raumes. Der Vektor, der von irgendeinem Punkte R zu einem anderen S führt, hängt mit dem Vektor, der von dem transformierten Punkt R′ zu dem transformierten Punkt S′ führt, ebenso zusammen wie $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}'$. Denn bezeichnen wir die Vektoren OR und OS mit

$$x_r\mathfrak{a} + y_r\mathfrak{b} + z_r\mathfrak{c} \text{ und } x_s\mathfrak{a} + y_s\mathfrak{b} + z_s\mathfrak{c},$$

so wird RS = OS — OR ausgedrückt durch:

$$(x_s - x_r)\mathfrak{a} + (y_s - y_r)\mathfrak{b} + (z_s + z_r)\mathfrak{c},$$

analog wird R′S′

$$(x_s - x_r)\mathfrak{e} + (y_s - y_r)\mathfrak{f} + (z_s - z_r)\mathfrak{g},$$

d. h. dieselben Masszahlen, die RS aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ableiten, leiten R′S′ aus $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ab, oder wie wir auch sagen können, bei der affinen Transformation des Raumes geht ein Vektor, der aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet ist, in den Vektor über, der aus $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ durch dieselben Masszahlen abgeleitet wird. Vier Punkte P, Q, R, S, die ein Parallelogramm bilden, müssen daher nach der Transformation wieder ein Parallelogramm bilden. Denn, wenn derselbe Vektor von P nach Q und von R nach S führt, so muss der transformierte Vektor von P′ nach Q′ und zugleich von R′ nach S′ führen. Allgemeiner kann man sagen, wenn $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$ irgendwelche Vektoren sind, zwischen denen eine Vektorgleichung

$$a_1\mathfrak{p}_1 + a_2\mathfrak{p}_2 + \cdots + a_n\mathfrak{p}_n = 0$$

besteht, so muss zwischen den transformierten Vektoren $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$, … $\mathfrak{p}_n'$ dieselbe Vektorgleichung

$$a_1\mathfrak{p}_1' + a_2\mathfrak{p}_2' + \cdots + a_n\mathfrak{p}_n' = 0$$

bestehen. Denn, wenn wir $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n$ durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ausdrücken, so

muss die Vektorgleichung in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ identisch erfüllt sein, weil $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch voneinander unabhängig vorausgesetzt sind. Folglich bleibt sie auch erfüllt, wenn wir $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ersetzen, d. h. wenn wir zur transformierten Vektorgleichung übergehen. Wenn insbesondere zwei Strecken die gleiche Richtung, aber ein beliebiges Längenverhältnis haben, so werden die transformierten Strecken ebenfalls gleiche Richtung und dasselbe Längenverhältnis haben. Denn, wenn $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die betreffenden Vektoren von gleicher Richtung sind und a ihr Längenverhältnis, so ist

$$\mathfrak{p}_1 = \mathrm{a}\mathfrak{p}_2$$

und dieselbe Gleichung muss zwischen den transformierten Vektoren bestehen. Drei in einer Graden liegende Punkte müssen daher auch nach der Transformation in einer Geraden liegen und die Abschnitte zwischen ihnen müssen dasselbe Verhältnis haben wie vorher. Vier in einer Ebene liegende Punkte müssen auch nach der Transformation in einer Ebene liegen. Wenn wir von einem der vier Punkte nach den anderen dreien Vektoren ziehen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ und es ist

$$\mathfrak{p}_3 = \mathrm{a}_1\mathfrak{p}_1 + \mathrm{a}_2\mathfrak{p}_2,$$

so gilt dieselbe Relation für die transformierten Punkte. D. h. wenn wir den ersten Punkt zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems und $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zu Einheitsvektoren machen, die zu zwei von den anderen Punkten führen, so sind a_1 und a_2 die Koordinaten des letzten Punktes in diesem System (Fig. 28). Machen wir dieselbe Konstruktion für die transformierten Punkte, so bleiben die Koordinaten in dem transformierten System die gleichen. Die Parallelen, die wir durch den vierten Punkt zu den Verbindungslinien des ersten Punktes mit dem zweiten und dritten ziehen, schneiden auf diesen Geraden Längen ab, deren Verhältnisse zu den Verbindungslinien selbst bei der Transformation unverändert bleiben.

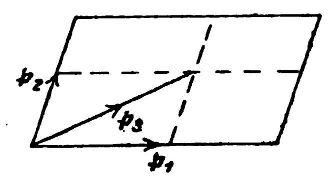


Fig. 28.

Im Raume können wir eine analoge Konstruktion machen. Wir denken uns fünf Punkte. Einen wählen wir zum Anfangspunkt und ziehen vier Vektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ nach den anderen vier Punkten und setzen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ voneinander unabhängig voraus. Dann ist

$$\mathfrak{p}_4 = a_1\mathfrak{p}_1 + a_2\mathfrak{p}_2 + a_3\mathfrak{p}_3$$

und a_1, a_2, a_3 sind die Koordinaten des fünften Punktes in einem System, dessen Anfangspunkt im ersten Punkt liegt und dessen Einheitsvektoren vom Anfangspunkt zum zweiten, dritten und vierten Punkt hinführen. Dieselbe Konstruktion bei den transformierten Punkten führt auf dieselben Koordinaten a_1, a_2, a_3 des transformierten fünften Punktes in dem transformierten System.

Wir können uns ein Bild von der Transformation machen, wenn wir uns ein Raumgitter denken, dass von dem festen Punkt O aus mit irgend drei voneinander unabhängigen Vektoren konstruiert ist. Bei der Transformation geht dies Raumgitter in ein neues über, jeder Zelle des ersten entspricht eine Zelle des zweiten. Die Lage eines Punktes in einer Zelle können wir uns dadurch gegeben denken, dass wir durch ihn Ebenen parallel den Seitenflächen der Zellen legen. Die Ebenen schneiden die Kanten der Zelle. Die Verhältnisse der Abschnitte zu den Kantenlängen bestimmen die Lage des Punktes. Diese Verhältnisse nun bleiben bei der Transformation ungeändert. Insbesondere kann man das Raumgitter der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ betrachten, von denen wir bei der Definition der affinen Transformation ausgegangen sind. Ihr Raumgitter geht in das der Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ über und die Vektorgleichung

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}$$

zwischen den Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ besteht auch zwischen den transformierten Vektoren

$$\mathfrak{r}' = x\mathfrak{e} + y\mathfrak{f} + z\mathfrak{g}$$

mit den unveränderten Masszahlen x, y, z. Wir nennen $\mathfrak{r}'$ eine Vektorfunktion des veränderlichen Vektors $\mathfrak{r}$.

Unter $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ wollen wir, wie oben, die zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziproken Vektoren verstehen, also

$$\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},\quad \mathfrak{b}^* = \frac{\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},\quad \mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

und wollen den Ausdruck bilden

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{a}^*.\mathfrak{l}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{b}^*.\mathfrak{l}) + \mathfrak{g}(\mathfrak{c}^*.\mathfrak{l}),$$

wo $\mathfrak{l}$ (der Anfangsbuchstabe des Wortes „Lücke") bedeuten soll, dass man an die Stelle von $\mathfrak{l}$ irgendeinen Vektor soll einsetzen können. Dann kann man sagen, dass dieser „Lückenausdruck" die

affine Transformation repräsentiert. Denn, wenn man an die Stelle von $\mathfrak{l}$ den Vektor $\mathfrak{a}$ setzt, so verschwinden $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}^*$ und $\mathfrak{a}.\mathfrak{c}^*$, während $\mathfrak{a}.\mathfrak{a}^* = 1$ ist. Mithin ergibt sich dann $\mathfrak{e}$, und analog ergeben sich $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, wenn man $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ einsetzt. Wird nun für $\mathfrak{l}$ der Vektor

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}$$

eingesetzt, so ergibt sich die Summe

$$\mathfrak{e}x + \mathfrak{f}y + \mathfrak{g}z,$$

d. h. es resultiert der Vektor $\mathfrak{r}'$. Wir nennen den Lückenausdruck

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}(\mathfrak{a}^*.\mathfrak{l}) + \mathfrak{f}(\mathfrak{b}^*.\mathfrak{l}) + \mathfrak{g}(\mathfrak{c}^*.\mathfrak{l})$$

aus einem unten erklärten Anlass einen „Tensor" und bezeichnen ihn mit einem Buchstaben $\mathfrak{T}$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir in dem Lückenausdruck die ausführliche Bezeichnung der Lücken fort und schreiben nur

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*,$$

wobei aber wohl zu merken, dass hier die zweiten Faktoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ für $\mathfrak{a}^*.\mathfrak{l}$, $\mathfrak{b}^*.\mathfrak{l}$, $\mathfrak{c}^*.\mathfrak{l}$ stehen, d. h. dass sie beim Einsetzen von $\mathfrak{r}$ zu den Masszahlen $\mathfrak{a}^*.\mathfrak{r}$, $\mathfrak{b}^*.\mathfrak{r}$, $\mathfrak{c}^*.\mathfrak{r}$ werden. Bei irgendwelchen Behauptungen, die über $\mathfrak{T}$ aufgestellt werden, kann man immer zur ausführlicheren Bezeichnung zurückkehren. Z. B. sieht man so ohne weiteres, dass man die Reihenfolge der drei Summanden in $\mathfrak{T}$ beliebig ändern kann, ohne dass der ausgefüllte Lückenausdruck, den wir durch $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ bezeichnen, sich ändert. Ferner kann man jeden der Terme in eine Summe von beliebig vielen anderen zerlegen, z. B. wenn $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a}^* = \mathfrak{e}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \mathfrak{e}[\mathfrak{l}.(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})] = \mathfrak{e}(\mathfrak{l}.\mathfrak{p}) + \mathfrak{e}(\mathfrak{l}.\mathfrak{q}) = \mathfrak{e}\mathfrak{p} + \mathfrak{e}\mathfrak{q}$$

oder wenn $\mathfrak{e} = \mathfrak{p}' + \mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}')(\mathfrak{l}.\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{p}'(\mathfrak{l}.\mathfrak{a}^*) + \mathfrak{q}'(\mathfrak{l}.\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{p}'\mathfrak{a}^* + \mathfrak{q}'\mathfrak{a}^*$$

oder auch zugleich

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}')(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \mathfrak{p}'\mathfrak{p} + \mathfrak{q}'\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\mathfrak{q} + \mathfrak{q}'\mathfrak{q}.$$

Wenn nun wieder die zweiten Faktoren in jedem der Terme Lückenausdrücke $\mathfrak{l}.\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}.\mathfrak{q}$ bedeuten, so behält $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ seinen Wert $\mathfrak{r}'$ bei. Ist $\mathfrak{a}^* = m\mathfrak{p}$, so kann der numerische Faktor m auch zu $\mathfrak{e}$ gestellt werden

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a}^* = \mathfrak{e}(\mathfrak{m}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}\mathfrak{e})\mathfrak{p},$$

ohne dass $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ sich ändert.

Man kann auf diese Weise anstatt $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ irgend drei andere voneinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ einführen, indem man für $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ die Ausdrücke einsetzt, durch die $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ aus $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ numerisch abgeleitet werden. Ordnet man nun die so entstehenden neun Glieder nach $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, so erhält man drei Glieder mit dem zweiten Faktor $\mathfrak{o}$, die sich wieder zu einem Gliede

$$\mathfrak{u}\mathfrak{o}$$

zusammenfassen lassen, indem man $\mathfrak{o}$ ausklammert. Analoges gilt für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so dass $\mathfrak{T}$ die Form annimmt

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}.$$

Hier sind $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Vektoren, in die sich die drei zu $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ reziproken Vektoren durch die Transformation $\mathfrak{T}$ verwandeln.

Man kann also in dem Ausdruck für $\mathfrak{T}$ die Terme $\mathfrak{e}\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{f}\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{g}\mathfrak{c}^*$ in bezug auf das distributive Gesetz gerade so behandeln, als ob sie Produkte wären, nur darf man die Faktoren nicht miteinander vertauschen, die hier, anders als bei dem skalaren und anders als bei dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren, zwei ganz voneinander verschiedene Bedeutungen haben. Dieselbe Transformation $\mathfrak{T}$ kann also auf mannigfaltige Weise als Summe von drei oder mehr als drei Termen $\mathfrak{u}\mathfrak{o}$ dargestellt werden. Sobald man indessen für die zweiten Faktoren aller Terme drei bestimmte voneinander unabhängige Vektoren einführt, aus denen man die zweiten Faktoren numerisch ableitet, so gehen auch die ersten Faktoren in drei ganz bestimmte Vektoren über, nämlich in die drei Vektoren, in die sich die zu jenen reziproken bei der Transformation verwandeln.

Hat man für $\mathfrak{T}$ zwei verschiedene Ausdrücke

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}$$

und

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}'\mathfrak{q}' + \cdots,$$

von denen der zweite auch mehr als drei Terme haben kann, und leitet man aus beiden Ausdrücken eine Plangrösse ab, indem man die Produkte $\mathfrak{u}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}'\mathfrak{p}'$ usw. als äussere Produkte von Vektoren auffasst, so muss in beiden Fällen dieselbe Plangrösse herauskommen. Denn wenn in dem Ausdruck

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}'\mathfrak{q}' + \cdots$$

$\mathfrak{p}', \mathfrak{q}' \cdots$ durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ausgedrückt und die Klammern nach dem distributiven Gesetz aufgelöst werden, so muss, wie wir oben gesehen haben, bei der Ordnung nach $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}$$

herauskommen, wo $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ eindeutig bestimmt sind als die Vektoren, in die sich $\mathfrak{o}^*, \mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*$, d. h. die zu $\mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ reziproken Vektoren durch die Transformation verwandeln. Aber alle diese Operationen sind ebensogut zulässig, wenn wir es mit den äusseren Produkten von Vektoren zu tun haben. Mithin muss die Plangrösse

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}'\mathfrak{q}' + \cdots$$

gleich der Plangrösse

$$\mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q} \text{ sein.}$$

Leitet man andererseits aus den beiden Ausdrücken zwei skalare Grössen ab, indem man die Produkte $\mathfrak{u}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}'\mathfrak{p}'$ usw. durch die skalaren Produkte $\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}'.\mathfrak{p}'$ usw. ersetzt, so sind auch diese skalaren Grössen einander gleich. Denn auch für die skalaren Produkte sind die Operationen zulässig, durch die man die beiden Ausdrücke ineinander überführen kann, und es muss daher der Wert

$$\mathfrak{u}'.\mathfrak{p}' + \mathfrak{v}'.\mathfrak{q}' + \cdots$$

gleich dem Wert

$$\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{q}$$

sein. Dieser Wert, ebenso wie die Plangrösse

$$\mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}$$

müssen für die Transformation eine geometrische Bedeutung haben, die uns erklärt, warum beide von der Ausdrucksform der Transformation unabhängig sind. Eine nähere Untersuchung der Transformation wird uns die Bedeutung enthüllen.

§ 2. Konjugierte Tensoren.

Wenn man in allen Termen die Faktoren vertauscht, so wird die Transformation dadurch im allgemeinen in eine andere verwandelt. Es wird z. B.

$$\mathfrak{o}\mathfrak{u} + \mathfrak{p}\mathfrak{v} + \mathfrak{q}\mathfrak{w}$$

nicht dieselbe Transformation vorstellen wie

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}.$$

Diese verwandelt die zu $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ reziproken Vektoren in die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, jene verwandelt die zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ reziproken Vektoren in $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$.

Wir nennen die beiden Transformationen und ebenso die beiden Tensoren „zueinander konjugiert“ und schreiben

$$\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{o}\mathfrak{u} + \mathfrak{p}\mathfrak{v} + \mathfrak{q}\mathfrak{w},$$

wenn

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}$$

gesetzt ist.

$\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ sind im allgemeinen voneinander verschieden. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die beiden konjugierten Transformationen identisch werden. Solche Tensoren bilden eine ausgezeichnete Klasse, die für sich untersucht werden muss und ihre besonderen Anwendungen hat, wie wir später sehen werden. Sie werden symmetrische Tensoren genannt.

Wird ein Tensor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q}$$

mit einem Vektor $\mathfrak{r}$ zu einem neuen Vektor

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{v}(\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{r}),$$

so bezeichnen wir dies mit

$$\mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{r} \text{ oder } \mathfrak{T} \mid \mathfrak{r}.$$

Da $\mid \mathfrak{r}$ eine Plangrösse $\mathfrak{R}$ bedeutet, so können wir somit auch

$$\mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{r} = \mathfrak{T}\mathfrak{R} = \mathfrak{u}(\mathfrak{o}\mathfrak{R}) + \mathfrak{v}(\mathfrak{p}\mathfrak{R}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{q}\mathfrak{R})$$

schreiben. Mit anderen Worten, es kommt auf dasselbe hinaus, ob wir die skalaren Produkte mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ oder die äusseren Produkte mit seiner Ergänzung $\mathfrak{R}$ bilden. Für die Anwendungen ist es aber gut, sich beide Möglichkeiten offen zu halten, wie später deutlich werden wird.

Das skalare Produkt des transformierten Vektors $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}$ mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ ist gleich

$$(\mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{r})\,.\,\mathfrak{r} = (\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{r}) + (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{r}) + (\mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{r}).$$

Dieselbe skalare Funktion ergibt sich durch das skalare Produkt $(\overline{\mathfrak{T}}\,.\,\mathfrak{r})\,.\,\mathfrak{r}$

$$(\overline{\mathfrak{T}}\,.\,\mathfrak{r})\,.\,\mathfrak{r} = (\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{r}) + (\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{r}) + (\mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{r})\ (\mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{r}).$$

Wir wollen, da eine Verwechslung nicht zu befürchten ist, in dem Ausdruck

$$(\mathfrak{T}.\mathfrak{r}).\mathfrak{r}$$

die Klammer fortlassen.

Wir bilden nun den Gradienten dieser skalaren Funktion, indem wir beachten, dass der Gradient des skalaren Produktes eines konstanten Vektors mit dem veränderlichen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ gleich dem konstanten Vektor ist. Denn der Gradient einer skalaren Funktion f ist durch die Gleichung

$$df = \nabla f . d\mathfrak{r}$$

definiert und andererseits ist

$$d(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{c}.d\mathfrak{r},$$

also

$$\nabla(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{c}$$

und

$$\nabla(\mathfrak{u}.\mathfrak{r})(\mathfrak{o}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{o}.\mathfrak{r}) + (\mathfrak{u}.\mathfrak{r})\mathfrak{o}.$$

Somit wird der Gradient von $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ oder, was dasselbe ist, von $\overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ gleich

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{o}.\mathfrak{r}) + (\mathfrak{u}.\mathfrak{r})\mathfrak{o} + \mathfrak{v}(\mathfrak{p}.\mathfrak{r}) + (\mathfrak{v}.\mathfrak{r})\mathfrak{p} + \mathfrak{w}(\mathfrak{q}.\mathfrak{r}) + (\mathfrak{w}.\mathfrak{r})\mathfrak{q},$$

d. h. es ist

$$\nabla(\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}) = \nabla(\overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{T}.\mathfrak{r} + \overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.$$

Die skalare Funktion $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ liefert, wenn sie gleich einer Konstanten gesetzt wird, die Gleichung einer Fläche zweiten Grades Dabei haben wir uns $\mathfrak{r}$ vom Anfangspunkt O abgetragen zu denken und in jeder Richtung, die zu einem Flächenpunkt führt, gerade so lang gemacht, wie es die Konstante verlangt. Der Gradient steht dann auf der Fläche in dem betrachteten Punkte senkrecht. Das skalare Produkt des Gradienten mit $\mathfrak{r}$ ergibt

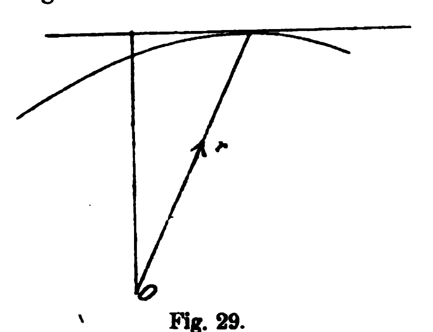


Fig. 29.

$$\nabla(\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}).\mathfrak{r} = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} + \overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 2\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r},$$

d. h. für alle Punkte der Fläche hat das skalare Produkt des Gradienten mit $\mathfrak{r}$ denselben Wert. Das skalare Produkt ist nun gleich der Länge des Gradienten multipliziert mit der Projektion von $\mathfrak{r}$ auf ihn. Mithin muss die Länge des Gradienten dem Abstand des Punktes O von der Tangentialebene umgekehrt proportional sein (Fig. 29).

§ 3. Die in sich transformierten Vektoren.

Um die Natur einer Transformation $\mathfrak{T}$ zu untersuchen, stellen wir die Frage, ob es Vektoren $\mathfrak{r}$ gibt, die bei der Transformation sich nur mit einem numerischen Wert λ multiplizieren, so dass also

$$\mathfrak{r}' = \lambda \mathfrak{r}.$$

Die zu $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ reziproken Vektoren $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ gehen bei der Transformation in $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ über. Leiten wir also $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ numerisch ab

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{o}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{p}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}) + \mathfrak{q}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q}),$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{r} = \mathfrak{u}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{v}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q}).$$

Es fragt sich nun also, ob es Vektoren $\mathfrak{r}$ gibt, für die

$$\lambda[\mathfrak{o}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{p}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}) + \mathfrak{q}^*(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q})] = \mathfrak{u}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{v}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q}),$$

oder, was dasselbe ist, für die

$$(\lambda\mathfrak{o}^* - \mathfrak{u})(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}) + (\lambda\mathfrak{p}^* - \mathfrak{v})(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}) + (\lambda\mathfrak{q}^* - \mathfrak{w})(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q}) = 0.$$

Da wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die drei Masszahlen $\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{q}$ nicht alle drei verschwinden können, so stellt diese Gleichung eine Abhängigkeit zwischen den drei Vektoren $\lambda\mathfrak{o}^* - \mathfrak{u}$, $\lambda\mathfrak{p}^* - \mathfrak{v}$, $\lambda\mathfrak{q}^* - \mathfrak{w}$ dar. Aus einer solchen Abhängigkeit folgt aber, dass das äussere Produkt dieser drei Vektoren Null sein muss. Wir entwickeln das äussere Produkt nach Potenzen von λ und erhalten so für λ die Gleichung dritten Grades

$$\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*\lambda^3 - (\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*\mathfrak{u} + \mathfrak{q}^*\mathfrak{o}^*\mathfrak{v} + \mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{w})\lambda^2 + (\mathfrak{o}^*\mathfrak{v}\mathfrak{w} + \mathfrak{p}^*\mathfrak{w}\mathfrak{u} \\ + \mathfrak{q}^*\mathfrak{u}\mathfrak{v})\lambda - \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} = 0,$$

oder wenn wir durch $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*$ dividieren, in dem zweiten Gliede wieder zu den Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zurückkehren und in dem dritten die zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ reziproken $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ einführen

$$\lambda^3 - \left(\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{u} + \mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{v} + \mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{w}\right)\lambda^2 + \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*}\Big[\left(\mathfrak{o}^*\,.\,\mathfrak{u}^* + \mathfrak{p}^*\,.\,\mathfrak{v}^* + \mathfrak{q}^*\,.\,\mathfrak{w}^*\right) \\ - 1\Big] = 0.$$

Wir bemerken, dass die Koeffizienten dieser Gleichung aus den drei Ausdrücken

$$\mathfrak{o}\,.\,\mathfrak{u} + \mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{v} + \mathfrak{q}\,.\,\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{o}^*\,.\,\mathfrak{u}^* + \mathfrak{p}^*\,.\,\mathfrak{v}^* + \mathfrak{q}^*\,.\,\mathfrak{w}^*,$$

$$\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*}$$

zusammengesetzt sind. Von diesen drei Ausdrücken ist uns der erste schon oben begegnet. Er entstand aus der Transformation

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{u}\mathfrak{o} + \mathfrak{v}\mathfrak{p} + \mathfrak{w}\mathfrak{q},$$

indem wir die drei Terme durch die skalaren Produkte ersetzten. Der zweite Ausdruck würde in derselben Weise aus der Transformation

$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{u}^* + \mathfrak{p}^*\mathfrak{v}^* + \mathfrak{q}^*\mathfrak{w}^*$$

entspringen. Diese Transformation $\mathfrak{T}^*$ führt die Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ über, macht also die Transformation $\mathfrak{T}$ gerade wieder rückgängig. Der dritte Ausdruck ist das Verhältnis der parallelepipedischen Räume $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*$, die durch die Transformationen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ ineinander verwandelt werden.

$$\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*} = (\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w})\,(\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{q}).$$

Auch dieser Ausdruck muss von der Wahl der drei Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ unabhängig sein. Der Quotient, dessen Nenner ein beliebiger Raum, dessen Zähler der transformierte Raum ist, hat für eine gegebene Transformation immer denselben Wert.

Ist λ eine reelle Wurzel der Gleichung und wird in die Ausdrücke $\lambda\mathfrak{o}^* - \mathfrak{u}$, $\lambda\mathfrak{p}^* - \mathfrak{v}$, $\lambda\mathfrak{q}^* - \mathfrak{w}$ eingesetzt, so werden diese drei Vektoren, da ihr äusseres Produkt verschwindet, voneinander abhängig, und, indem man die Abhängigkeit zwischen ihnen durch eine Vektorgleichung darstellt, erhält man durch die Koeffizienten die Verhältnisse von $\mathfrak{r}.\mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}.\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}.\mathfrak{q}$, die bis auf einen beliebigen Proportionalitätsfaktor die Masszahlen des gesuchten Vektors $\mathfrak{r}$ in bezug auf die Vektoren $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ ergeben. Der Proportionalitätsfaktor muss beliebig bleiben, denn wenn ein Vektor $\mathfrak{r}$ die verlangte Eigenschaft hat, dass er sich in $\lambda\mathfrak{r}$ transformiert, so hat ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches von $\mathfrak{r}$ dieselbe Eigenschaft.

Die drei Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ können, wie oben schon bemerkt wurde, beliebig gewählt werden, wofern sie nur voneinander unabhängig sind. Wir wollen sie senkrecht zueinander in rechts gewundener Reihenfolge und von der Länge eins annehmen. Die reziproken Vektoren $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ sind dann mit $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ identisch und $\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$

ist gleich eins. Drei Vektoren von dieser Eigenschaft bezeichnen wir mit den Buchstaben $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Die Gleichung dritten Grades kann somit geschrieben werden

$$\lambda^3 - (\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{i} + \mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{j} + \mathfrak{w}\,.\,\mathfrak{k})\,\lambda^2 + \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}\,[(\mathfrak{u}^*.\,\mathfrak{i} + \mathfrak{v}^*.\,\mathfrak{j} + \mathfrak{w}^*.\,\mathfrak{k})\,\lambda - 1] = 0.$$

§ 4. Drehungstensoren.

Besteht die Transformation in einer Drehung um eine durch O laufende Achse, so müssen auch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ aufeinander in rechts gewundener Reihenfolge senkrecht stehen und die Länge eins haben. Die reziproken Vektoren $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ sind dann auch mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ identisch und $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ ist gleich eins. Wir bezeichnen sie infolgedessen mit $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$. Die Gleichung dritten Grades lässt sich dann schreiben

$$\lambda^3 - (\mathfrak{i}'\,.\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\,.\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\,.\,\mathfrak{k})\,(\lambda^2 - \lambda) - 1 = 0.$$

Eine der Wurzeln wird darnach $\lambda = 1$ sein. Der entsprechende Vektor $\mathfrak{r}$ wird also bei der Transformation sich nicht ändern, d. h. er wird in die Drehungsachse fallen. Die Verhältnisse der Masszahlen $(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{i})$, $(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{j})$, $(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{k})$ eines solchen Vektors erhalten wir aus der Vektorgleichung

$$(\mathfrak{i} - \mathfrak{i}')(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{i}) + (\mathfrak{j} - \mathfrak{j}')(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{j}) + (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')(\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{k}) = 0.$$

In der Tat kann $\mathfrak{i} - \mathfrak{i}'$ durch die Strecke dargestellt werden, die von dem Endpunkt von $\mathfrak{i}'$ zum Endpunkt von $\mathfrak{i}$ führt, wenn beide von O aus abgetragen werden. Der Vektor $\mathfrak{i} - \mathfrak{i}'$ ist demnach senkrecht zur Drehungsachse und dasselbe gilt von $\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'$. Alle drei sind daher derselben Ebene parallel und somit voneinander abhängig.

Wir vereinfachen die Lösung, indem wir $\mathfrak{i}$ in der Drehungsachse annehmen. Dann ist $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ sind derselben Ebene parallel; ferner ist $\mathfrak{i}\,.\,\mathfrak{i}' = 1$, $\mathfrak{j}\,.\,\mathfrak{j}' = \mathfrak{k}\,.\,\mathfrak{k}' = \cos\vartheta$, wenn ϑ den Drehungswinkel bedeutet (Fig. 30). Damit ergibt sich

$$\mathfrak{i}'\,.\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\,.\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\,.\,\mathfrak{k} = 1 + 2\cos\vartheta.$$

Da die Summe der skalaren Produkte, wie wir oben sahen, immer denselben Wert hat, unabhängig von der Form, in der die Transformation gegeben sein mag, so haben wir hiermit eine einfache Methode, um den Drehungswinkel ϑ zu berechnen. Wir haben

nur alle Terme in dem Ausdruck der Transformation als skalare Produkte der beiden Faktoren aufzufassen, dann gibt die Summe den Wert $1 + 2 \cos \vartheta$.

Auch die Drehungsachse kann in ähnlicher Weise gefunden werden. Da nämlich, wie wir oben sahen, die Plangrösse, die wir erhalten, wenn wir alle Terme in dem Ausdruck für die Transformation als äussere Produkte der beiden Faktoren auffassen, immer dieselbe bleibt, in welche Form wir auch den Ausdruck der Transformation bringen, so können wir die geometrische Bedeutung der Plangrösse dadurch finden, dass wir wieder $\mathfrak{i}$ in die Drehungsachse legen. Dann wird $\mathfrak{i}'\mathfrak{i} = 0$ und $\mathfrak{j}'\mathfrak{j} = \mathfrak{k}'\mathfrak{k}$, wird eine Plangrösse senkrecht zur Drehungsachse, deren numerischer Wert gleich $\sin \vartheta$ und deren Umlaufsinn für $\vartheta < 180^{\circ}$ dem Drehungssinn entgegengesetzt ist (vergleiche Fig. 30). Kehren wir also die Reihenfolge der Faktoren um, so stimmt der Umlaufsinn mit dem Drehungssinn überein. Die Plangrösse

$$\mathfrak{o}\mathfrak{u} + \mathfrak{p}\mathfrak{v} + \mathfrak{q}\mathfrak{w}$$

stellt also, wie man auch $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gewählt haben mag, die Drehungstransformation vollständig dar, insofern, als diese Plangrösse auf der Drehungsachse senkrecht steht, ihr Umlaufsinn den Sinn der Drehung angibt und ihr numerischer Wert gleich $2 \sin \vartheta$ ist (ϑ der kleiner als 180° anzunehmende Drehungswinkel).

Fig. 30.

Eine Drehungstransformation ist dadurch ausgezeichnet, dass sie jedes sich selbst reziproke System von drei Vektoren wieder in ein sich selbst reziprokes System von gleichem Windungssinn überführt. Die konjugierte Transformation, die wir nach der obigen Definition dadurch erhalten, dass wir die beiden Faktoren jedes Terms miteinander vertauschen, ist wieder eine Drehungstransformation. Sie führt das zweite System wieder in das erste zurück. Wenn wir also mit $\mathfrak{r}'$ die konjugierte Transformation ausführen würden, so müsste sich wieder $\mathfrak{r}$ ergeben. Das ist bei anderen Transformationen nicht immer der Fall. Denn wenn eine Transformation das zu sich selbst reziproke System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in ein System $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ verwan-

delt, so verwandelt die konjugierte Transformation das zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ reziproke System $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Die konjugierte Transformation kann also nur dann die erste Transformation rückgängig machen, wenn $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ identisch ist.

Ist das der Fall und ist ausserdem $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ von gleichem Windungssinn wie $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so ist die Transformation eine Drehung. Ist indessen zwar $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ identisch, aber der Windungssinn von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ dem von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ entgegengesetzt, so haben wir es nicht mit einer einfachen Drehungstransformation zu tun. Wir können sie aber durch eine Drehungstransformation verbunden mit einer „Inversion" ersetzen. Unter „Inversion" verstehen wir dabei eine Transformation, die $\mathfrak{r}$ in $-\mathfrak{r}$ verwandelt, die also den entgegengesetzten Windungssinn hervorruft. Wenn wir zwei Transformationen, die einander rückgängig machen, „zueinander reziprok" nennen, so können wir also sagen, dass die Drehungstransformationen und die mit Inversion verbundenen Drehungstransformationen von allen Transformationen allein die Eigenschaft haben, dass die konjugierte Transformation jedesmal auch die reziproke Transformation ist. (Die Inversion selbst ist dabei mitzurechnen.)

§ 5. Zu sich selbst konjugierte oder symmetrische Tensoren.

Neben diesen betrachten wir noch eine andere Klasse von Transformationen, die dadurch ausgezeichnet sein sollen, dass jeder Tensor $\mathfrak{T}$ mit dem konjugierten $\overline{\mathfrak{T}}$ identisch ist.

Wie wir oben fanden, ist der Gradient der skalaren Funktion $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ oder, was dasselbe ist, $\overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ gleich

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} + \overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r}.$$

Wenn also

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \overline{\mathfrak{T}}.\mathfrak{r},$$

so ist die Transformation von $\mathfrak{r}$ gleich der Hälfte des Gradienten der skalaren Funktion $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = {}^1\!/_2 \nabla (\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}).$$

Die Vektoren $\mathfrak{r}$, für die $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor λ von $\mathfrak{r}$ unterscheiden, müssen daher in die Hauptachsenrichtungen der Flächen zweiter Ordnung

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = \text{Konst.}$$

fallen, wobei wir uns $\mathfrak{r}$ von O aus abgetragen denken, um zu den Punkten der Fläche zu gelangen. Denn die Hauptachsen liefern die Punkte der Fläche, wo der Gradient in die Richtung des Radius Vektor fällt. Die Wurzeln der Gleichung dritten Grades für λ müssen dann drei reelle Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 haben und dazu gehören drei aufeinander senkrechte Vektoren von beliebiger Länge, die bei der Transformation sich mit den Faktoren λ_1, λ_2, λ_3 multiplizieren. Legen wir ein zu sich selbst reziprokes System von Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in diese Richtungen, so wird $\mathfrak{u} = \lambda_1\mathfrak{i}$, $\mathfrak{v} = \lambda_2\mathfrak{j}$, $\mathfrak{w} = \lambda_3\mathfrak{k}$ und somit

$$\mathfrak{T} = \lambda_1\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \lambda_3\mathfrak{k}\mathfrak{k}.$$

Die aus $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gebildeten Zellen des kubischen Raumgitters werden in rechtwinklig parallelepipedische transformiert, deren Kanten denen der kubischen Zellen parallel sind. Wenn λ_1, λ_2, λ_3 alle drei positiv sind, so besteht die Transformation des Raumes in einem Zusammendrängen ($\lambda < 1$) oder Ausdehnen ($\lambda > 1$) des Raumes in den drei aufeinander senkrechten Richtungen. Bei negativen Werten der λ kommt zu dem Zusammendrängen oder Ausdehnen in der betreffenden Richtung noch eine Spiegelung an der dazu senkrechten, durch O laufenden Ebene hinzu.

Wir haben hier die Gesetze der Hauptachsen der Flächen zweiten Grades als bekannt vorausgesetzt. Will man sie erst ableiten, so kann das im Anschluss an die Bezeichnungen der Vektoranalysis in folgender Weise geschehen.

Wir denken uns die sämtlichen Vektoren $\mathfrak{r}$ von der Länge eins vom Punkte O aus abgetragen, so dass ihre Endpunkte die Oberfläche einer Kugel bilden. Jeden Oberflächenpunkt der Kugel denken wir uns mit dem Werte der skalaren Funktion $\mathfrak{f} = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ belegt, wo $\mathfrak{r}$ der zu dem Punkte gehörende Vektor ist. Die skalare Funktion ist auf der Kugeloberfläche stetig und endlich und muss daher ihre obere und ihre untere Grenze an mindestens je einem Punkte erreichen. Gehen wir von einem dieser Punkte zu einem benachbarten Punkt der Kugeloberfläche, so ändert sich die skalare Funktion um

$$d\mathfrak{f} = \nabla\mathfrak{f}.d\mathfrak{r},$$

oder, wenn dr den numerischen Wert von $d\mathfrak{r}$ bezeichnet,

$$\frac{df}{dr} = \nabla f \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{dr}.$$

$\frac{d\mathfrak{r}}{dr}$ ist ein Vektor von der Länge eins, der in dem betrachteten Punkte auf dem Vektor $\mathfrak{r}$ senkrecht steht. Nun muss $\frac{df}{dr} = 0$ sein; denn wäre es von Null verschieden, so müsste es mit $\frac{d\mathfrak{r}}{dr}$ sein Vorzeichen wechseln, d. h. f würde sich vergrössern und verkleinern, wenn man von dem betrachteten Punkte nach entgegengesetzten Richtungen auf der Kugeloberfläche fortschreiten würde, könnte also in dem Punkte keine obere oder untere Grenze erreicht haben. In den Punkten, wo die obere oder untere Grenze erreicht wird, muss folglich der Gradient ∇f auf dem Vektor $\frac{d\mathfrak{r}}{dr}$ senkrecht stehen, d. h. er kann sich von $\mathfrak{r}$ nur um einen skalaren Faktor unterscheiden. An den beiden Enden eines Kugeldurchmessers hat die skalare Funktion $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ denselben Wert. Denn verwandelt man $\mathfrak{r}$ in $-\mathfrak{r}$, so geht auch $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ in $-\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ über. Der oberen und unteren Grenze entsprechen also mindestens zwei verschiedene Durchmesser der Kugel, für die

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}$$

ist. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{r}$ ergibt sich

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = \lambda.$$

λ ist daher für den einen Durchmesser gleich der oberen, für den anderen gleich der unteren Grenze der skalaren Funktion. Diese beiden voneinander verschiedenen reellen Werte von λ — wenn wir den Fall, dass $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ auf der ganzen Kugeloberfläche konstant ist, vorläufig ausschliessen — müssen Wurzeln der oben aufgestellten Gleichung dritten Grades sein. Wir wollen sie mit λ_1 und λ_2 und zwei zugehörige Radien mit $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ bezeichnen.

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}_1 = \lambda_1\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{T}.\mathfrak{r}_2 = \lambda_2\mathfrak{r}_2.$$

Multiplizieren wir die erste Vektorgleichung skalar mit $\mathfrak{r}_2$, die zweite mit $\mathfrak{r}_1$, so ergibt sich

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_2 = \lambda_1\mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{T}.\mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_1 = \lambda_2\mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_1.$$

Nun ist

$$\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r}_1),$$

und da $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_1 = \overline{\mathfrak{T}} \cdot \mathfrak{r}_1$

$$\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = \overline{\mathfrak{T}} \cdot \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = (\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}_1) + (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r}_1).$$

Das ist aber gleich $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{r}_1$, mithin

$$\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{r}_1,$$

und folglich

$$\lambda_1 \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = \lambda_2 \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2.$$

Da aber λ_1 und λ_2 voneinander verschieden sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn

$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 = 0.$$

Das heisst, die beiden Durchmesser, an deren Enden die skalare Funktion ihre obere und untere Grenze annimmt, stehen aufeinander senkrecht.

Wir nehmen nun $\mathfrak{i} = \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2$ an. Dann ist $\mathfrak{u} = \lambda_1 \mathfrak{i}$, $\mathfrak{v} = \lambda_2 \mathfrak{j}$ und somit

$$\mathfrak{T} = \lambda_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{w}\mathfrak{k},$$

und daher

$$\overline{\mathfrak{T}} = \lambda_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{w}.$$

Aus $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r} = \overline{\mathfrak{T}} \cdot \mathfrak{r}$ folgt somit, dass für jeden Vektor $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r}) = \mathfrak{k}(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r}),$$

d. h. die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{k}$ unterscheiden sich auch nur durch einen skalaren Proportionalitätsfaktor.

Schreiben wir

$$\mathfrak{w} = \lambda_3 \mathfrak{k},$$

so ist

$$\mathfrak{T} = \lambda_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \lambda_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k}.$$

Die skalare Funktion $\mathfrak{f} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}$ nimmt demnach die Form an

$$\mathfrak{f} = \lambda_1 (\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{r})^2 + \lambda_2 (\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{r})^2 + \lambda_3 (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r})^2$$

oder, wenn wir die Projektionen von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit x, y, z bezeichnen

$$\mathfrak{f} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2.$$

Wir haben oben den Fall, dass die obere und untere Grenze der skalaren Funktion zusammenfallen, ausgeschlossen. Wollen wir ihn auch berücksichtigen, so brauchen wir nur anzusetzen, dass f

auf der ganzen Kugeloberfläche konstant ist. Sei auf der Kugeloberfläche der Wert von f gleich λ, so ist auf der Kugeloberfläche

$$f = \mathfrak{T} . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} = \lambda \mathfrak{r} . \mathfrak{r}.$$

Dann gilt aber dieselbe Gleichung im ganzen Raume. Denn wenn $\mathfrak{r}$ in $n\mathfrak{r}$ verwandelt wird, so geht auch $\mathfrak{T} . \mathfrak{r}$ in $n\mathfrak{T} . \mathfrak{r}$ über. Da nun $\mathfrak{T} . \mathfrak{r}$ gleich dem halben Gradienten von $\mathfrak{T} . \mathfrak{r} . \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ gleich dem halben Gradienten von $\mathfrak{r} . \mathfrak{r}$, so ist für den ganzen Raum

$$\mathfrak{T} . \mathfrak{r} = \lambda \mathfrak{r}.$$

Für positive Werte von λ stellt dies eine Ähnlichkeitstransformation dar, für negative Werte kommt eine Inversion hinzu. Für $\lambda = -1$ ist es die Inversion selbst. Alle diese Transformationen können wir in der Form schreiben

$$\mathfrak{T} = \lambda (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*),$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebige voneinander unabhängige Vektoren und $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ die zu ihnen reziproken sind. Denn wenn man $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet hat

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c},$$

so wird $$(\mathfrak{r} . \mathfrak{a}^*) = x, \quad \mathfrak{r} . \mathfrak{b}^* = y, \quad \mathfrak{r} . \mathfrak{c}^* = z,$$

mithin $$\mathfrak{a}(\mathfrak{r} . \mathfrak{a}^*) + \mathfrak{b}(\mathfrak{r} . \mathfrak{b}^*) + \mathfrak{c}(\mathfrak{r} . \mathfrak{c}^*) = \mathfrak{r}$$

oder $$\mathfrak{T} . \mathfrak{r} = \lambda \mathfrak{r}.$$

Wählen wir für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein zu sich selbst reziprokes System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so lässt sich der Tensor in der Form schreiben

$$\mathfrak{T} = \lambda (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}).$$

Wenn die obere und untere Grenze λ_1 und λ_2 voneinander verschieden sind, so kann immer noch der spezielle Fall eintreten, dass λ_3 gleich λ_1 oder gleich λ_2 wird. Ist z. B. $\lambda_3 = \lambda_2$, so transformieren sich die Vektoren $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ in $\lambda_2 \mathfrak{j}$ und $\lambda_2 \mathfrak{k}$, mithin multipliziert sich jeder aus $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ numerisch abgeleitete Vektor durch die Transformation mit λ_2, und wir können an Stelle von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ irgend zwei andere aus $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ numerisch abgeleitete zusammen mit $\mathfrak{i}$ reziproke Vektoren $\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{k}'$ setzen, für die dann ebenfalls

$$\mathfrak{T} = \lambda_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}'\mathfrak{j}' + \lambda_2 \mathfrak{k}'\mathfrak{k}'.$$

Sind dagegen λ_1, λ_2, λ_3 alle drei voneinander verschieden, so gibt es nur drei Kugeldurchmesser für die

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}.$$

Denn da λ, wie wir oben gesehen haben, der Gleichung dritten Grades genügen und daher einen der Werte λ_1, λ_2, λ_3 haben muss, so folgt z. B. für $\lambda = \lambda_1$ aus

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \lambda_1\mathfrak{i}(\mathfrak{r}.\mathfrak{i}) + \lambda_2\mathfrak{j}(\mathfrak{r}.\mathfrak{j}) + \lambda_3\mathfrak{k}(\mathfrak{r}.\mathfrak{k}) = \lambda_1\mathfrak{r}$$
$$= \lambda_1[\mathfrak{i}(\mathfrak{r}.\mathfrak{i}) + \mathfrak{j}(\mathfrak{r}.\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}(\mathfrak{r}.\mathfrak{k})],$$

die Vektorgleichung

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\mathfrak{j}(\mathfrak{r}.\mathfrak{j}) + (\lambda_3 - \lambda_1)\mathfrak{k}(\mathfrak{r}.\mathfrak{k}) = 0.$$

Da $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ voneinander unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn zugleich $\mathfrak{r}.\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{r}.\mathfrak{k}$ Null ist, d. h. wenn $\mathfrak{r}$ die gleiche oder entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{i}$ hat. Ebenso schliesst man für $\lambda = \lambda_2$ oder $\lambda = \lambda_3$, dass $\mathfrak{r}$ dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{j}$ oder wie $\mathfrak{k}$ haben muss, mit anderen Worten, dass nur für die betreffenden drei Durchmesser die Beziehung

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}$$

erfüllt sein kann.

§ 6. Zusammensetzung von Tensoren.

Es sei $\mathfrak{T}$ eine Transformation, die den Vektor $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ verwandelt und $\mathfrak{T}'$ eine Transformation, die $\mathfrak{r}'$ in $\mathfrak{r}''$ verwandelt, so dass also

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}; \quad \mathfrak{r}'' = \mathfrak{T}'.\mathfrak{r}',$$

so verstehen wir unter $\mathfrak{T}'.\mathfrak{T}$ die Transformation, die $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}''$ verwandelt

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{T}'.\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}'.(\mathfrak{T}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{T}''.\mathfrak{r}.$$

Ist nun

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{e}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{f}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{g}'\mathfrak{c}',$$

so wird

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{T}'.\mathfrak{r}' = \mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{T}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{f}'(\mathfrak{b}'.\mathfrak{T}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{g}'(\mathfrak{c}'.\mathfrak{T}.\mathfrak{r}).$$

Jeden dieser Terme z. B. $\mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{T}.\mathfrak{r})$ können wir schreiben

$$\mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{e})(\mathfrak{a}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{f})(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{g})(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}),$$

oder wenn wir $\mathfrak{r}$ wieder, wie bei der vereinfachten Schreibweise für $\mathfrak{T}$ herausstellen

$$[\mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{e})\mathfrak{a} + \mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{f})\mathfrak{b} + \mathfrak{e}'(\mathfrak{a}'.\mathfrak{g})\mathfrak{c}].\mathfrak{r}.$$

Jeder der drei Terme liefert drei solche Glieder, so dass wir im ganzen neun erhalten. Jedes Glied besteht aus vier Vektoren, von

denen die mittleren beiden skalar miteinander multipliziert sind. Die neun Glieder können wir uns so gebildet denken, dass wir das Produkt

$$\mathfrak{T}'.\mathfrak{T} = (\mathfrak{e}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{f}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{g}'\mathfrak{c}')(\mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c})$$

nach dem distributiven Gesetz ausführen, indem wir jedes Glied des ersten Faktors mit jedem Glied des zweiten Faktors zusammenstellen, ohne die Reihenfolge der Vektoren zu ändern und dann bei jedem Produkt von vier Vektoren die beiden mittleren zu einem skalaren Produkt vereinigen. Dieses skalare Produkt können wir wieder mit dem vorangehenden oder mit dem darauffolgenden Vektor zu einem neuen Vektor vereinigen, so dass jedes Glied dann nur aus zwei Vektoren besteht, von denen der zweite wieder der Kürze halber für das skalare Produkt mit einer „Lücke" geschrieben ist, in die der zu transformierende Vektor $\mathfrak{r}$ einzusetzen ist.

Auf diese Weise nimmt $\mathfrak{T}'.\mathfrak{T}$ wieder die Form einer Summe von Produkten von zwei Vektoren an wie $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ selbst. Diese Summe können wir wieder auf drei Glieder zurückführen, indem wir, wie oben auseinandergesetzt wurde, die zweiten Faktoren durch irgend drei voneinander unabhängige Vektoren ausdrücken und nach dem distributiven Gesetz alle Glieder, die denselben zweiten Faktor haben, zu einem Glied zusammenziehen, oder auch, indem wir die ersten Faktoren jedes Gliedes so ausdrücken und die Glieder zusammenziehen, die denselben ersten Faktor haben.

Die Transformation $\mathfrak{T}'.\mathfrak{T}$ ist wohl zu unterscheiden von der Transformation $\mathfrak{T}.\mathfrak{T}'$, bei der $\mathfrak{r}$ zuerst in $\mathfrak{T}'.\mathfrak{r}$ und dieser Vektor dann durch $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{T}.(\mathfrak{T}'.\mathfrak{r})$ transformiert wird. Nur in besonderen Fällen kann $\mathfrak{T}'.\mathfrak{T}$ gleich $\mathfrak{T}.\mathfrak{T}'$ sein.

Auch wenn $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ durch Summen von mehr als drei Produkten von je zwei Vektoren ausgedrückt sind, findet man $\mathfrak{T}'.\mathfrak{T}$ in derselben Weise wie bei Summen von drei Produkten, indem man die Klammern nach dem distributiven Gesetz auflöst und wieder bei jedem Produkt von vier Vektoren die mittleren beiden zu einem skalaren Produkt vereinigt.

Unter der Summe zweier Transformationen

$$\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$$

verstehen wir die Transformation, die $\mathfrak{r}$ in

$$\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r} + \mathfrak{T}_2.\mathfrak{r}$$

verwandelt. Ihr Ausdruck kann dadurch gebildet werden, dass man die Ausdrücke für $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ addiert. Aus der Gültigkeit des distributiven Gesetzes ergibt sich dann unmittelbar

$$\mathfrak{T}.(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{T}.\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}.\mathfrak{T}_2$$

und

$$(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2).\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1.\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_2.\mathfrak{T}.$$

Durch diese Rechnungsregeln rechtfertigt sich die Auffassung auch der Zusammensetzung der Transformationen als einer Art Multiplikation.

Setzt man eine Transformation $\mathfrak{T}$ mit der zu ihr reziproken $\mathfrak{T}^*$ zusammen, so erhält man in der oben beschriebenen Weise für $\mathfrak{T}.\mathfrak{T}^*$ oder auch für $\mathfrak{T}^*.\mathfrak{T}$ einen Ausdruck von derselben Form wie der von $\mathfrak{T}$. Aber er drückt keine eigentliche Transformation aus, denn $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ heben sich bei der Zusammensetzung gegenseitig auf, die eine Transformation macht die andere rückgängig, so dass ein beliebiger Vektor wieder in sich selbst übergeht. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebige voneinander unabhängige Vektoren und $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ die dazu reziproken, so kann $\mathfrak{T}.\mathfrak{T}^*$ und ebenso $\mathfrak{T}^*.\mathfrak{T}$ auf die Form

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}^*.\mathfrak{T} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*$$

gebracht werden; denn

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*).\mathfrak{r} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}^*.\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{b}^*.\mathfrak{r}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{c}^*.\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}.$$

Da wir $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*).\mathfrak{r}$ als eine Multiplikation auffassen, so liegt es nahe, den Faktor $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*$ mit eins zu bezeichnen, weil $\mathfrak{r}$ sich bei der Multiplikation mit diesem Faktor nicht ändert. So schreiben wir also:

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{T}^* = 1 \text{ und demgemäss } \mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}^{-1}.$$

§ 7. Zerlegung in Drehungstensor und zu sich selbst konjugierten Tensor.

Die beiden Klassen von Transformationen, die wir oben besonders untersucht haben, die Drehungen und die sich selbst konjugierten Transformationen, liefern, wie wir jetzt zeigen wollen, durch Zusammensetzung jede beliebige Transformation. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ eine beliebige Transformation, so wird die Kugel, die wir erhalten, wenn wir

$$\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 1$$

setzen und $\mathfrak{r}$ von O aus abtragen, durch die Transformation in eine Fläche zweiter Ordnung verwandelt, deren Punkte wir erhalten, wenn wir den Vektor

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T} . \mathfrak{r}$$

von O aus abtragen.

Zwei aufeinander senkrechte Durchmesser der Kugel müssen in zwei konjugierte Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung übergehen. Denn wenn wir in den Endpunkten des einen Kugeldurchmessers die Tangentialebenen an die Kugel konstruieren, so müssen sie in Tangentialebenen der Fläche zweiter Ordnung übergehen. Folglich muss der andere Kugeldurchmesser, der ja den Tangentialebenen in den Endpunkten des zu ihm senkrechten Durchmessers parallel ist, sich in einen Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung transformieren, der den transformierten Tangentialebenen parallel ist.

In der Sprache der Vektoranalysis lässt sich dies so ausdrücken.

Aus $\mathfrak{r}' = \mathfrak{T} . \mathfrak{r}$ folgt $d\mathfrak{r}' = \mathfrak{T} . d\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r} = \mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}'$, $d\mathfrak{r} = \mathfrak{T}^{-1} . d\mathfrak{r}'$. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung ergibt sich aus der Gleichung der Kugel, wenn wir $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}'$ ausdrücken und in die Gleichung der Kugel einsetzen

$$\mathfrak{r} . \mathfrak{r} = (\mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}') . (\mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}') = 1.$$

Wenn man von einem durch $\mathfrak{r}'$ definierten Punkte der Fläche zweiter Ordnung zu einem benachbarten Punkte der Fläche geht, indem man $\mathfrak{r}'$ um $d\mathfrak{r}'$ ändert, so sind $\mathfrak{r}'$ und $d\mathfrak{r}'$ konjugierten Durchmessern parallel. Daher erhalten wir die Bedingung für die konjugierten Durchmesser durch Differentiation von

$$(\mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}') . (\mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}') = 1.$$

Die Bedingung ist daher

$$2 (\mathfrak{T}^{-1} . \mathfrak{r}') . (\mathfrak{T}^{-1} . d\mathfrak{r}') = 0.$$

Das ist aber andererseits gleich der Bedingung

$$2 \mathfrak{r} . d\mathfrak{r} = 0,$$

d. h. dass die entsprechenden untransformierten Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Die drei Hauptachsen der Fläche zweiter Ordnung müssen somit als zueinander konjugierte Durchmesser aus drei aufeinander senkrechten Durchmessern der Kugel hervorgehen. Seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei

aufeinander senkrechte Vektoren von der Länge eins in rechtsgewundener Reihenfolge, die in diese drei Durchmesser der Kugel fallen und $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ drei ebensolche Vektoren, die in die Hauptachsen der Fläche zweiter Ordnung fallen. Ferner sei

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}.\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{T}.\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{T}.\mathfrak{k},$$

so sind also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, den Vektoren $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ parallel, so dass $\mathfrak{a} = \lambda_1 \mathfrak{i}'$, $\mathfrak{b} = \lambda_2 \mathfrak{j}'$, $\mathfrak{c} = \lambda_3 \mathfrak{k}'$ gesetzt werden kann.

Jetzt bilden wir zwei Transformationen, von denen die erste $\mathfrak{T}_1$ die Vektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ verwandelt, die zweite $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ verwandelt

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{i}' + \mathfrak{b}\mathfrak{j}' + \mathfrak{c}\mathfrak{k}' = \lambda_1 \mathfrak{i}'\mathfrak{i}' + \lambda_2 \mathfrak{j}'\mathfrak{j}' + \lambda_3 \mathfrak{k}'\mathfrak{k}' = \mathfrak{i}'\mathfrak{a} + \mathfrak{j}'\mathfrak{b} + \mathfrak{k}'\mathfrak{c}.$$

Die erste Transformation ist eine Drehung, die zweite ist eine sich selbst konjugierte Transformation. Setzt man sie zusammen, so erhält man die Transformation $\mathfrak{T}$, die $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ transformiert

$$\mathfrak{T}_2 . \mathfrak{T}_1 = (\mathfrak{a}\mathfrak{i}' + \mathfrak{b}\mathfrak{j}' + \mathfrak{c}\mathfrak{k}')(\mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}) = \mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\mathfrak{k}.$$

Man kann auch zuerst eine sich selbst konjugierte Transformation machen, die $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in $\mathfrak{e} = \lambda_1 \mathfrak{i}$, $\mathfrak{f} = \lambda_2 \mathfrak{j}$, $\mathfrak{g} = \lambda_3 \mathfrak{k}$ verwandelt

$$\mathfrak{e}\mathfrak{i} + \mathfrak{f}\mathfrak{j} + \mathfrak{g}\mathfrak{k}$$

und dann eine Drehung, die $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ überführt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{e}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{f}^* + \mathfrak{e}\mathfrak{g}^*.$$

Dann ergibt sich durch Zusammensetzung wieder die gegebene Transformation $\mathfrak{T}$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{e}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{f}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{g}^*)(\mathfrak{e}\mathfrak{i} + \mathfrak{f}\mathfrak{j} + \mathfrak{g}\mathfrak{k}) = \mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\mathfrak{k}.$$

Die Drehung ist in beiden Fällen dieselbe. Denn

$$\mathfrak{e}^* = \frac{\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}} = \frac{1}{\lambda_1}\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{f}^* = \frac{1}{\lambda_2}\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{g}^* = \frac{1}{\lambda_3}\mathfrak{k}$$

und daher

$$\mathfrak{a}\mathfrak{e}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{f}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{g}^* = \mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\mathfrak{j} + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}.$$

Aber die beiden sich selbst konjugierten Transformationen sind nicht einander gleich. Bei der einen wird in den Richtungen $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ gedehnt oder zusammengedrängt, bei der anderen in den Richtungen $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$.

§ 8. Die Masszahlen und Einheiten eines Tensors.

Wenn man es mit bestimmten numerisch gegebenen Transformationen zu tun hat, so muss numerisch gegeben sein, wie ein gegebenes Vektortripel in ein gewisses anderes Vektortripel zu verwandeln ist.

Haben wir z. B. die Transformation

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c},$$

bei der die Vektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ übergehen, so denken wir uns die neun Masszahlen gegeben, durch die die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} &= a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{f} &= a_{21}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{g} &= a_{31}\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Dann lässt sich $\mathfrak{T}$ auch schreiben

$$a_{11}\mathfrak{a}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}\mathfrak{c} + a_{23}\mathfrak{c}\mathfrak{b} + a_{32}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + a_{31}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + a_{13}\mathfrak{c}\mathfrak{a} \\ + a_{12}\mathfrak{b}\mathfrak{a} + a_{21}\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

In der ausführlicheren Schreibweise würde in jedem Gliede an Stelle des letzten Faktors der Lückenausdruck $\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{l}$ statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{l}$ statt $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{l}$ statt $\mathfrak{c}$ zu setzen sein, in dessen Lücke $\mathfrak{l}$ bei der Transformation $\mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{r}$ der Vektor $\mathfrak{r}$ zu treten hat.

Die konjugierte Transformation

$$\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{a}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{c}\mathfrak{g}$$

lässt sich in analoger Weise schreiben, indem man für $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ihre Ausdrücke einsetzt

$$a_{11}\mathfrak{a}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}\mathfrak{c} + a_{32}\mathfrak{c}\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + a_{13}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + a_{31}\mathfrak{c}\mathfrak{a} \\ + a_{21}\mathfrak{b}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

d. h. der Ausdruck für $\mathfrak{T}$ geht in den für $\overline{\mathfrak{T}}$ über, wenn man in jedem Gliede die beiden Vektoren vertauscht oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man in jedem Gliede die beiden Indices der Masszahlen vertauscht.

Eine sich selbst konjugierte Transformation ist also dadurch charakterisiert, dass $a_{32} = a_{23}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{21} = a_{12}$. Die neun Masszahlen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

nennen wir die Koordinaten oder die Masszahlen der Transformation oder des Tensors $\mathfrak{T}$ in bezug auf die neun Einheiten

$$\begin{matrix} \mathfrak{aa}, & \mathfrak{ab}, & \mathfrak{ac} \\ \mathfrak{ba}, & \mathfrak{bb}, & \mathfrak{bc} \\ \mathfrak{ca}, & \mathfrak{cb}, & \mathfrak{cc}. \end{matrix}$$

Man kann durch passende Wahl dieser neun Masszahlen die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ irgend drei gegebenen Vektoren gleich machen und somit jede affine Transformation ausdrücken. Die Werte der neun Grössen müssen, um eine affine Transformation abzugeben, der einzigen Bedingung genügen, dass ihre Determinante nicht verschwindet. Denn die Determinante drückt, wie wir oben sahen, das Verhältnis der beiden Räume $\mathfrak{efg}$ und $\mathfrak{a}^* \mathfrak{b}^* \mathfrak{c}^*$ aus, die nicht verschwinden, weil sowohl $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ wie $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ voneinander unabhängig vorausgesetzt sind.

§ 9. Tensoren aus weniger als drei Gliedern.

Wir wollen an der Voraussetzung festhalten, dass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ voneinander unabhängig sind, aber nunmehr zulassen, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ voneinander abhängig werden, zunächst so, dass zwei von ihnen, z. B. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ voneinander unabhängig bleiben. Dann verschwindet das äussere Produkt $\mathfrak{efg}$ und damit die Determinante der neun Masszahlen. Die Transformation

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T} . \mathfrak{r}$$

können wir immer noch für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{r}$ in derselben Weise wie vorher ausführen, aber die Vektoren $\mathfrak{r}'$ stellen nicht mehr alle möglichen Vektoren des Raumes vor, sondern nur diejenigen, die aus $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ numerisch abgeleitet werden können, die also einer Ebene parallel sind. Wenn wir $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ ausdrücken und die Glieder zusammenfassen, die $\mathfrak{e}$ als ersten Faktor haben, und ebenso die Glieder, die $\mathfrak{f}$ als ersten Faktor haben, so nimmt $\mathfrak{T}$ die Form an

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{eo} + \mathfrak{fp},$$

wo $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in gewisser Weise numerisch abgeleitet sind. Wenn $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ voneinander unabhängig sind, so können wir einen dritten Vektor $\mathfrak{q}$ hinzufügen, der von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ unabhängig ist. Dann lassen sich $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ aus $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ numerisch ableiten in der Form

$$\mathfrak{e} = b_{11}\mathfrak{o} + b_{12}\mathfrak{p} + b_{13}\mathfrak{q}$$
$$\mathfrak{f} = b_{21}\mathfrak{o} + b_{22}\mathfrak{p} + b_{23}\mathfrak{q}.$$

Eine solche Transformation $\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{o} + \mathfrak{f}\mathfrak{p}$ ist also schon durch sechs Masszahlen

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix}$$

charakterisiert. Wir nennen das ihre Masszahlen in bezug auf das System $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$.

Sind $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ noch stärker voneinander abhängig, so dass sie von einem von ihnen, z. B. von $\mathfrak{e}$, numerisch abgeleitet werden können, dann kann man alle Glieder von $\mathfrak{T}$ in ein einziges zusammenziehen von der Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{o}.$$

Die Transformation

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \mathfrak{e}(\mathfrak{o}.\mathfrak{r})$$

verwandelt dann alle Vektoren $\mathfrak{r}$ in Vektoren $\mathfrak{r}'$, die aus $\mathfrak{e}$ numerisch abgeleitet werden können. Wenn wir zu $\mathfrak{o}$ noch zwei von $\mathfrak{o}$ und untereinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ hinzufügen, so lässt sich $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ numerisch ableiten

$$\mathfrak{e} = c_{11}\mathfrak{o} + c_{12}\mathfrak{p} + c_{13}\mathfrak{q}.$$

Eine Transformation $\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{o}$ ist also durch drei Masszahlen

$$c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}$$

gegeben. Wir nennen sie ihre Masszahlen in bezug auf $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Alle drei Arten von Transformationen sind in der Form

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$$

enthalten, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ voneinander unabhängig sein sollen. Je nachdem zwei von ihnen unabhängig voneinander bleiben oder alle aus einem abgeleitet werden können, werden die transformierten Vektoren alle einer Ebene oder alle einer Geraden parallel. Diese letzte Art ist sozusagen der einfachste Bestandteil der allgemeinen Transformation, insofern diese sich als eine Summe von Transformationen dieser einfachsten Art darstellen lässt.

Zu den betrachteten Transformationen gehört auch diejenige, die wir erhalten, wenn der variable Vektor $\mathfrak{r}$ mit einem festen

Vektor $\mathfrak{o}$ vektoriell multipliziert wird. Denken wir uns nämlich zu $\mathfrak{o}$ zwei andere Vektoren gewählt, so dass $\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{q} = 1$, so wird

$$\mathfrak{o}^* = \mathfrak{p} \times \mathfrak{q},\ \mathfrak{p}^* = \mathfrak{q} \times \mathfrak{o},\ \mathfrak{q}^* = \mathfrak{o} \times \mathfrak{p}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{o}(\mathfrak{o}^*.\mathfrak{r}) + \mathfrak{p}(\mathfrak{p}^*.\mathfrak{r}) + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}^*.\mathfrak{r}),$$

folglich

$$\begin{aligned}\mathfrak{o} \times \mathfrak{r} &= \mathfrak{q}^*(\mathfrak{p}^*.\mathfrak{r}) - \mathfrak{p}^*(\mathfrak{q}^*.\mathfrak{r})\\ &= \mathfrak{T}.\mathfrak{r},\end{aligned}$$

wo

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{q}^*\mathfrak{p}^* - \mathfrak{p}^*\mathfrak{q}^*.$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass jede Transformation von dieser Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

sich durch ein vektorielles Produkt des variabeln Vektors mit dem festen Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ersetzen lässt. Denn es ist

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}.\mathfrak{r}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}).$$

Bestimmen wir nun einen Vektor $\mathfrak{c}$ so, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$ und setzen $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, so ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}^*(\mathfrak{a}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}^*(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}) + \mathfrak{c}^*(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})$$

und daher

$$\mathfrak{c}^* \times \mathfrak{r} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}.\mathfrak{r}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}) = \mathfrak{T}.\mathfrak{r},$$

ein Resultat, das wir auch unmittelbar aus der oben (Kap. 1, § 15) abgeleiteten Formel

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{r} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}.\mathfrak{r}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}.\mathfrak{r})$$

hätten ableiten können.

Die konjugierte Transformation $\overline{\mathfrak{T}}$ ist hier gleich $-\mathfrak{T}$, so dass die Summe $\mathfrak{T} + \overline{\mathfrak{T}}$, die, wie wir oben sahen, im allgemeinen einen zu sich selbst konjugierten Tensor darstellt und somit eine skalare Funktion $2\mathfrak{T}\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ liefert, hier verschwindet.

Ist irgendeine Transformation

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$$

ihrer konjugierten

$$\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{a}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{c}\mathfrak{g}$$

entgegengesetzt, so ist

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\mathfrak{T} - \overline{\mathfrak{T}}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{e}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{e}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{f}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{f}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\mathfrak{g}),$$

d. h. die Transformation $\mathfrak{T}$ ist eine Summe von drei Transformationen der eben betrachteten Art, die sich durch die vektorielle Multiplikation mit einem festen Vektor ersetzen lassen. Die Transformation $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ ist demnach gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{e}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{f}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{g})\times\mathfrak{r}$$

oder wenn wir

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{e}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{f}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{g})=\mathfrak{p}\times\mathfrak{q}$$

setzen,

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

Jede Transformation $\mathfrak{T}$, die ihrer konjugierten entgegengesetzt ist, kann mithin auf die Form

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{q}$$

gebracht werden und $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ ist nichts anderes als das vektorielle Produkt

$$(\mathfrak{p}\times\mathfrak{q})\times\mathfrak{r}.$$

Eine solche Transformation ist also durch einen Vektor $\mathfrak{p}\times\mathfrak{q}$ oder, wenn man will, durch die zugehörige Plangrösse $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, die Ergänzung des Vektors vollkommen gegeben.

Um uns ein Bild von dem transformierten Vektor $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ zu machen, wollen wir die Plangrösse in die Ebene der Zeichnung gelegt denken, ebenso wie den festen Punkt O, von dem aus wir $\mathfrak{r}$ abtragen. Den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ projizieren wir senkrecht in die Ebene der Zeichnung nach P. Der Vektor $OP=\mathfrak{r}_1$ unterscheidet sich von $\mathfrak{r}$ um einen Vektor, der zur Zeichenebene senkrecht steht, also $\mathfrak{p}\times\mathfrak{q}$ parallel ist. Daher ist

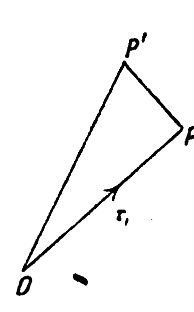


Fig. 31.

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}=(\mathfrak{p}\times\mathfrak{q})\times\mathfrak{r}=(\mathfrak{p}\times\mathfrak{q})\times\mathfrak{r}_1,$$

d. h. alle Vektoren $\mathfrak{r}$, deren Endpunkte, wenn man sie von O aus abträgt, in dieselbe Gerade fallen, die in P auf der Ebene senkrecht steht, transformieren sich in denselben Vektor $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$. Dieser steht auf OP senkrecht nach der Seite, die dem Umlaufsinn der Plangrösse $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ entspricht. Ist der numerische Wert der Plangrösse gleich 1, so ist die Länge von $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ gleich der von $\mathfrak{r}_1$, ist er grösser oder kleiner als 1, so ist die Länge

von $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ in demselben Verhältnis grösser oder kleiner als die Länge von $\mathfrak{r}_1$. Von P aus abgetragen, führt $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ zu einem Punkt P'. Dann ist tg $\measuredangle$ P'OP gleich dem numerischen Wert der Plangrösse $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (Fig. 31).

§ 10. Symmetrische und antisymmetrische Tensoren.

Ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$ eine beliebige Transformation und bildet man aus $\mathfrak{T}$ und dem konjugierten $\overline{\mathfrak{T}}$ die halbe Summe und die halbe Differenz:

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{\mathfrak{T} + \overline{\mathfrak{T}}}{2}, \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{\mathfrak{T} - \overline{\mathfrak{T}}}{2},$$

so ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$$

und einerseits $\mathfrak{T}_1 = \overline{\mathfrak{T}}_1$, andererseits $\mathfrak{T}_2 = -\overline{\mathfrak{T}}_2$. Denn wir erhalten $\overline{\mathfrak{T}}_1$ und $\overline{\mathfrak{T}}_2$, wenn wir in allen Gliedern die Vektoren vertauschen, wobei $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ ineinander übergehen. Daher

$$\overline{\mathfrak{T}}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{T}} + \mathfrak{T}}{2}, \quad \overline{\mathfrak{T}}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{T}} - \mathfrak{T}}{2}.$$

Mit anderen Worten, jede beliebige Transformation lässt sich als Summe zweier Transformationen darstellen, von denen die eine sich selbst konjugiert, die andere der zu ihr konjugierten entgegengesetzt ist.

Daher setzt $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ sich aus $\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r} + \mathfrak{T}_2.\mathfrak{r}$ zusammen. $\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r}$ ist, wie wir oben sahen, der halbe Gradient der skalaren Funktion $\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{T}_2.\mathfrak{r}$ ist das vektorielle Produkt

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{e} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{f} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{g}) \times \mathfrak{r}.$$

Wir sehen hier die geometrische Bedeutung der Plangrösse

$$\mathfrak{a}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{c}\mathfrak{g},$$

von der oben schon die Rede war. Ihre halbe Ergänzung liefert den Vektor, dessen vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{r}$ den transformierten Vektor $\mathfrak{T}_2.\mathfrak{r}$ gibt. Auch die geometrische Bedeutung von

$$\mathfrak{e}.\mathfrak{a} + \mathfrak{b}.\mathfrak{f} + \mathfrak{c}.\mathfrak{g}$$

lässt sich hier einsehen. Da nämlich $\mathfrak{T}_1$ sich selbst konjugiert ist, so lässt sich dieser Tensor, wie oben gezeigt worden ist, auf die Form bringen

$$\mathfrak{T}_1 = \lambda_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \lambda_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k}.$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{e} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{g}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{g})$$

und daher, wie oben gezeigt (Kap. III, § 1),

$$\mathfrak{e}.\mathfrak{a} + \mathfrak{f}.\mathfrak{b} + \mathfrak{g}.\mathfrak{c} = \lambda_1 \mathfrak{i}.\mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j}.\mathfrak{j} + \lambda_3 \mathfrak{k}.\mathfrak{k} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

D. h. $\mathfrak{e}.\mathfrak{a} + \mathfrak{f}.\mathfrak{b} + \mathfrak{g}.\mathfrak{c}$ ist gleich der Summe der drei Zahlen λ_1, λ_2, λ_3, die angeben, wie der Raum in den drei zueinander senkrechten Richtungen gedehnt oder gepresst und, wenn sie negativ sind, obendrein gespiegelt werden muss, um die Transformation $\mathfrak{T}_1$ auszuführen.

§ 11. Reziproke Tensoren.

Die zu einer Transformation $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$$

reziproke Transformation verwandelt die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ wieder in $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, die drei zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziproken Vektoren, zurück. Daher lässt sie sich in der Form schreiben

$$\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{e}^* + \mathfrak{b}^*\mathfrak{f}^* + \mathfrak{c}^*\mathfrak{g}^*.$$

Das setzt natürlich voraus, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ voneinander unabhängig sind. Denn wären sie voneinander abhängig, so wäre das äussere Produkt $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ gleich Null und die reziproken Vektoren

$$\mathfrak{e}^* = \frac{\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{f}^* = \frac{\mathfrak{g} \times \mathfrak{e}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{g}^* = \frac{\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$$

würden sich nicht bilden lassen.

Die numerischen Beziehungen zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ und den Vektoren $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ lassen sich durch dieselben neun Masszahlen $a_{\alpha\beta}$ ausdrücken, durch die $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet werden. Denn aus

$$\mathfrak{e} = a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c} \text{ usw.}$$

folgt

$$\mathfrak{e}.\mathfrak{a}^* = a_{11}, \quad \mathfrak{e}.\mathfrak{b}^* = a_{12}, \quad \mathfrak{e}.\mathfrak{c}^* = a_{13} \text{ usw.}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^* &= a_{11}\mathfrak{e}^* + a_{21}\mathfrak{f}^* + a_{31}\mathfrak{g}^* \\ \mathfrak{b}^* &= a_{12}\mathfrak{e}^* + a_{22}\mathfrak{f}^* + a_{32}\mathfrak{g}^* \\ \mathfrak{c}^* &= a_{13}\mathfrak{e}^* + a_{23}\mathfrak{f}^* + a_{33}\mathfrak{g}^* \end{aligned}$$

In dem Schema der neun Masszahlen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}$$

sind nur die Reihen mit den Kolonnen vertauscht und die Masszahlen beziehen sich für die reziproke Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$ nicht auf das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, auf das sich die Masszahlen $a_{\alpha\beta}$ für $\mathfrak{T}$ beziehen, sondern auf das System $\mathfrak{e}^* \mathfrak{f}^* \mathfrak{g}^*$. Wünschen wir $\mathfrak{T}^{-1}$ auf $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ zu beziehen, so haben wir $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ durch $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ auszudrücken, d. h. wir haben die vektoriellen Rechnungen

$$\mathfrak{e}^* = \frac{\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}}{\mathfrak{efg}}, \quad \mathfrak{f}^* = \frac{\mathfrak{g} \times \mathfrak{e}}{\mathfrak{efg}}, \quad \mathfrak{g}^* = \frac{\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}}{\mathfrak{efg}}$$

auszuführen, indem wir für $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ihre Ausdrücke in $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ einsetzen.

Das gibt

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}^* &= a^*_{11}\mathfrak{a}^* + a^*_{12}\mathfrak{b}^* + a^*_{13}\mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{f}^* &= a^*_{21}\mathfrak{a}^* + a^*_{22}\mathfrak{b}^* + a^*_{32}\mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{g}^* &= a^*_{31}\mathfrak{a}^* + a^*_{32}\mathfrak{b}^* + a^*_{33}\mathfrak{c}^*. \end{aligned}$$

Das sind die Umkehrungen der oben hingeschriebenen Vektorgleichungen, durch die $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ numerisch aus $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ abgeleitet sind. Dieselben Masszahlen $a^*_{\alpha\beta}$ liefern die Umkehrungen der Gleichungen

$$\mathfrak{e} = a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c} \text{ usw.},$$

wenn wir nur die Indices vertauschen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a^*_{11}\mathfrak{e} + a^*_{21}\mathfrak{f} + a^*_{31}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{b} &= a^*_{12}\mathfrak{e} + a^*_{22}\mathfrak{f} + a^*_{32}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{c} &= a^*_{13}\mathfrak{e} + a^*_{23}\mathfrak{f} + a^*_{33}\mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Denn von der Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$, die wir uns auf $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ bezogen, also durch die Masszahlen $a^*_{\alpha\beta}$ bestimmt denken wollen, gelangen wir zu der reziproken Transformation $\mathfrak{T}$ auf dem analogen Wege, auf dem wir von $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{T}^{-1}$ gelangten. $\mathfrak{T}$ ist also durch dieselben Masszahlen $a^*_{\alpha\beta}$ bestimmt, nur sind die Indices zu vertauschen und sie sind nicht auf das System $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, sondern auf $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ zu beziehen.

§ 12. Der Tensorbegriff.

Eine solche Beziehung zwischen den beiden veränderlichen Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$, wie sie durch

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T} . \mathfrak{r}$$

ausgedrückt ist, kommt nicht nur bei den affinen Transformationen des Raumes vor, sondern auch bei manchen anderen mathematischen und physikalischen Betrachtungen, die an und für sich mit einer Transformation des Raumes nichts zu tun haben. Wir haben schon oben zwei solche Fälle kennen gelernt. Das eine Mal wurde r′ durch den Gradienten einer gewissen skalaren Ortsfunktion f (r) dargestellt, das andere Mal wurde r′ durch das vektorielle Produkt eines konstanten Vektors mit r erhalten. Um auch ein physikalisches Beispiel zu geben, so kann man in einem Punkte eines elastischen, durch irgendwelche Kräfte beanspruchten Körpers die Spannungen betrachten, die in den verschiedenen durch den Punkt laufenden Ebenen an der Stelle herrschen. Wenn wir uns den Körper in einer der Ebenen durchschnitten und den einen Teil weggenommen denken, so müssen wir uns auf die Elemente der Schnittebene gewisse Kräfte ausgeübt denken, wenn alles in dem vorigen Gleichgewicht bleiben soll. An der betrachteten Stelle können wir uns eine unendlich kleine Plangrösse denken, die in der Schnittebene liegt und durch ihren Umlaufsinn andeutet, auf welcher Seite der festgehaltene Körper liegt, z. B. durch die Festsetzung, dass er auf der positiven Seite der Plangrösse liegen soll. Dann entspricht an der betrachteten Stelle jeder solchen Plangrösse eine gewisse Kraft, die dort angebracht werden müsste, um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

Wenn wir den weggeschnittenen Teil festgehalten und den anderen weggeschnitten hätten, so müsste die Plangrösse mit dem entgegengesetzten Umlaufsinn genommen werden, damit der festgehaltene Teil wieder auf ihrer positiven Seite liegt. Dann ist aber die Kraft auch der ersten Kraft gerade entgegengesetzt. Die Beschreibung des Spannungszustandes an der betrachteten Stelle besteht also in der Angabe der Beziehung zwischen Plangrösse und Kraft. Die Plangrösse können wir durch ihre Ergänzung dargestellt denken und haben es somit bei einem gegebenen Spannungszustand mit einer Beziehung zwischen zwei Vektoren r und r′ zu tun, von denen der eine eine beliebige unendlich kleine Plangrösse, der andere die zugehörige unendlich kleine Kraft ausdrückt. Es wird in der Elastizitätslehre gezeigt, dass in erster Annäherung für nicht zu starke Beanspruchungen des elastischen Körpers die Beziehung

zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ von der Art ist, wie wir sie bei der affinen Transformation kennen gelernt haben. Weitere Beispiele von solchen Beziehungen zwischen veränderlichen Vektoren werden wir noch kennen lernen.

Diese Anwendungen auf den elastischen Spannungszustand hat dazu geführt, für den Begriff der Zuordnung von $\mathfrak{r}'$ zu $\mathfrak{r}$ das Wort „Tensor" zu gebrauchen. Ursprünglich sollte das Wort an den Spannungszustand erinnern (tendere = spannen, tensio = Spannung); aber es hat heute die farblosere abstrakte Bedeutung bekommen, dass es nur die Zuordnung eines Vektors zu einem anderen ausdrückt, möge es sich nun um eine wirkliche Spannung handeln oder nicht. Wir wollen das Wort von nun an in demselben neutralen Sinne brauchen und demnach von einem Tensor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$$

reden, von dem konjugierten Tensor

$$\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{a}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{c}\mathfrak{g},$$

von dem reziproken Tensor

$$\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{e}^* + \mathfrak{b}^*\mathfrak{f}^* + \mathfrak{c}^*\mathfrak{g}^*$$

von dem Tensor, der durch die Addition zweier Tensoren entsteht, von dem Tensor $\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{T}_2$, der durch das Produkt zweier Tensoren entsteht usw.

Sobald man einen Tensor numerisch bestimmen will, muss man ihn auf ein bestimmtes System von drei voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beziehen, und zwar kann er, wie wir oben sahen, in der Form

$$a_{11}\mathfrak{a}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}\mathfrak{c} + a_{23}\mathfrak{c}\mathfrak{b} + a_{32}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + a_{31}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + a_{13}\mathfrak{c}\mathfrak{a} \\ + a_{21}\mathfrak{a}\mathfrak{b} + a_{12}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

geschrieben werden. Er ist also aus den neun Tensoren $\mathfrak{aa}$, $\mathfrak{bb}$, $\mathfrak{cc}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cb}$, $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ba}$ durch die neun Zahlen $a_{\alpha\beta}$ numerisch abgeleitet. Wir nennen die neun Tensoren $\mathfrak{aa}$, $\mathfrak{bb}$, $\mathfrak{cc}$, $\mathfrak{bc}$ usw. die Tensoreinheiten des Systems $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $a_{\alpha\beta}$ die Masszahlen des Tensors in bezug auf diese Einheiten, wobei die Werte 1, 2, 3 des ersten Index, den zweiten Faktoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechen und die Werte 1, 2, 3 des zweiten Index den ersten Faktoren.

Gerade so wie ein Vektor durch seine drei Masszahlen aus drei

Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ numerisch abgeleitet wird, so wird ein Tensor aus den neun Tensoreinheiten des Systems abgeleitet.

Ist $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, so ist, wie wir oben sahen, der Tensor sich selbst konjugiert. Wir wollen das einen „symmetrischen Tensor" nennen. Wenn wir die Masszahlen von $\mathfrak{r}$ in bezug auf $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ mit x, y, z bezeichnen, so wird für einen symmetrischen Tensor

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

und die Beziehung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}$$

kann, wie wir oben sahen, dadurch dargestellt werden, dass wir $\mathfrak{r}'$ gleich dem Gradienten der skalaren Ortsfunktion $\frac{1}{2}\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ setzen.

Das Vektorfeld des Gradienten veranschaulicht uns in diesem Fall geometrisch die Beziehung zwischen $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$, indem wir jedem Vektor $\mathfrak{r}$ den Gradienten an derjenigen Stelle des Raumes zuordnen, die er von O aus abgetragen erreicht. Jedem symmetrischen Tensor entspricht hiernach eine quadratische Form von drei Veränderlichen x, y, z

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy,$$

wo x, y, z die Masszahlen von $\mathfrak{r}$ in bezug auf $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ sind. Und umgekehrt, jeder solchen quadratischen Form von x, y, z, wo x, y, z Masszahlen sind, die sich auf drei beliebige voneinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ beziehen, entspricht ein symmetrischer Tensor

$$\mathfrak{T} = a_{11}\mathfrak{a}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}\mathfrak{c} + a_{23}(\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{b}) + a_{31}(\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}) + a_{12}(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a}).$$

Die Beziehung zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ lässt sich, wie wir oben sahen, so darstellen, dass wir die Fläche zweiter Ordnung $\mathfrak{r}'.\mathfrak{r} = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 1$ konstruieren, indem wir $\mathfrak{r}$ von O aus abtragen. Für jedes $\mathfrak{r}$ ist das $\mathfrak{r}'$ senkrecht zur Fläche im Endpunkt von $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{r}'$ fällt also von O aus abgetragen in das Lot, das von O auf die Tagentialebene im Endpunkt von $\mathfrak{r}$ gefällt werden kann, und seine Länge ist gleich dem reziproken Wert der Länge des Lotes. Für eine andere Fläche zweiten Grades, die einem anderen konstanten Wert von $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ entspricht, brauchen wir uns nur $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ beide in

gleichem Masse verändert zu denken. Werden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ beide n mal so gross angenommen, so wird $\mathfrak{r}'.\mathfrak{r}$ n^2 mal so gross.

Die symmetrischen Tensoren veranschaulichen demnach in einer gewissen Weise die quadratischen Formen von drei Variabeln.

Ein Tensor, der dem zu ihm konjugierten entgegengesetzt ist, nennen wir einen „antisymmetrischen Tensor“. Für ihn ist $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ und $a_{23} = -a_{32}$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{12} = -a_{21}$, wie wir oben sahen, so dass er die Form annimmt

$$\mathfrak{T} = a_{23}(\mathfrak{c}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}) + a_{31}(\mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\mathfrak{a}) + a_{12}(\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Wenn x, y, z wieder die Masszahlen sind, die $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ numerisch ableiten, so wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}.\mathfrak{r} &= a_{23}(\mathfrak{c}y - \mathfrak{b}z) + a_{31}(\mathfrak{a}z - \mathfrak{c}x) + a_{12}(\mathfrak{b}x - \mathfrak{a}y)\\ &= a_{23}\frac{\mathfrak{a}^* \times \mathfrak{r}}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} + a_{31}\frac{\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{r}}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} + a_{12}\frac{\mathfrak{c}^* \times \mathfrak{r}}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*}\\ &= \frac{a_{23}\mathfrak{a}^* + a_{31}\mathfrak{b}^* + a_{12}\mathfrak{c}^*}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} \times \mathfrak{r}.\end{aligned}$$

D. h. $\mathfrak{r}'$ entsteht aus $\mathfrak{r}$ dadurch, dass der konstante Vektor

$$\frac{a_{23}\mathfrak{a}^* + a_{31}\mathfrak{b}^* + a_{12}\mathfrak{c}^*}{\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*} = a_{23}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + a_{31}(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) + a_{12}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$$

mit $\mathfrak{r}$ vektoriell multipliziert wird. Dieser Vektor ist die Ergänzung der Plangrösse

$$a_{23}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + a_{31}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Wenn man in dem Ausdruck des antisymmetrischen Tensors

$$\mathfrak{T} = a_{23}(\mathfrak{c}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}) + a_{31}(\mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\mathfrak{a}) + a_{12}(\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

alle Glieder so auffasst, als wären es äussere Produkte von zwei Vektoren, so geht $\mathfrak{T}$ in die Plangrösse

$$\mathfrak{P} = 2a_{23}\mathfrak{c}\mathfrak{b} + 2a_{31}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + 2a_{12}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

über. Die Beziehung zwischen $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$ kann dann so geschildert werden; es wird aus $\mathfrak{r}$ das vektorielle Produkt

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \times \mid \frac{1}{2}\mathfrak{P}$$

gebildet. Jedem antisymmetrischen Tensor entspricht demnach eine bestimmte Plangrösse $\mathfrak{P}$ und umgekehrt jeder Plangrösse $\mathfrak{P}$ entspricht ein bestimmter antisymmetrischer Tensor, der nichts anderes bedeutet, als den Übergang eines veränderlichen Vektors $\mathfrak{r}$ zu dem

vektoriellen Produkt von $\mathfrak{r}$ mit der halben Ergänzung von $\mathfrak{P}$. Die Plangrösse $\mathfrak{P}$ lässt sich genau so schreiben wie der Tensor $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{P} = a_{23}(\mathfrak{c}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}) + a_{31}(\mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\mathfrak{a}) + a_{12}(\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

nur bedeuten hier die einzelnen Glieder äussere Produkte der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Jeder beliebige Tensor $\mathfrak{T}$ lässt sich als die Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors schreiben

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Der symmetrische Tensor $\mathfrak{T}_1$ ist die halbe Summe von $\mathfrak{T}$ und dem ihm konjugierten $\overline{\mathfrak{T}}$, der antisymmetrische Tensor ist die halbe Differenz von $\mathfrak{T}$ und dem konjugierten $\overline{\mathfrak{T}}$.

Es sei z. B. eine Drehung um eine durch O laufende Achse gegeben mit dem Drehungswinkel ϑ. Sie verwandelt einen von O aus abgetragenen Vektor $\mathfrak{r}$ in einen Vektor $\mathfrak{r}'$. Der Übergang definiert einen Tensor $\mathfrak{T}$. Diesen Tensor wollen wir in einen symmetrischen Tensor $\mathfrak{T}_1$ und einen antisymmetrischen $\mathfrak{T}_2$ zerlegen. Bei einer Drehung ist, wie wir oben sahen, der konjugierte Tensor gleich dem reziproken, folglich

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{\mathfrak{T} + \mathfrak{T}^{-1}}{2}; \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}^{-1}}{2}.$$

Wir wollen uns die Drehungsachse senkrecht zur Ebene der Zeichnung (Fig. 32) vorstellen. Bei der Drehung bewegt sich ein Punkt P in der Ebene der Zeichnung in einem Kreisbogen nach P′, bei der reziproken Drehung bewegt er sich nach P″. Jeder Punkt einer durch P senkrecht zur Zeichenebene laufenden Geraden bewegt sich parallel zur Zeichenebene und bleibt in derselben Senkrechten mit dem in der Zeichenebene sich bewegenden Punkte. Ebenso bei der reziproken Drehung.

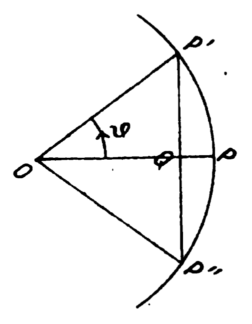


Fig. 32.

Ist $\mathfrak{r}$ der Vektor, der von O zu dem Punkte in seiner ursprünglichen Lage führt, so kann der also aus zwei Teilen zusammengesetzt werden, aus dem Vektor, der von O nach P führt und einem konstanten Teil $\mathfrak{c}$, der zur Zeichenebene senkrecht ist. Dann wird offenbar $\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{r}$ gleich dem Vektor $OQ + \mathfrak{c}$, wo Q in der

Mitte zwischen P′ und P″ liegt und $\mathfrak{T}_2 \mathfrak{r}$ wird gleich der Hälfte des Vektors P″P′, d. h. gleich dem Vektor QP′.

Die Transformation $\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{r}$ zieht alle zur Drehungsachse parallelen Geraden an die Drehungsachse heran, so dass sich ihre Entfernung im Verhältnis $\cos\vartheta$ verkleinert (ein negativer Wert von $\cos\vartheta$ bedeutet dabei, dass die Grade auf die entgegengesetzte Seite von O tritt), sie presst den Raum symmetrisch um die Drehungsachse zusammen, wozu bei negativem $\cos\vartheta$ noch eine Umklappung hinzutritt. Die Transformation $\mathfrak{T}_2 . \mathfrak{r}$ fügt zu $\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{r}$ den Vektor QP′ hinzu, der das vektorielle Produkt eines auf der Zeichenebene senkrechten Vektors von der Länge $\sin\vartheta$ mit $\mathfrak{r}$ ist.

Vektoranalytisch würde sich diese geometrische Überlegung so darstellen. Wir nehmen ein zu sich selbst reziprokes rechtsgewundenes System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ an, bei dem $\mathfrak{k}$ der Drehungsachse parallel ist. Die Drehung verwandele $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}$, wo

$$\mathfrak{i}' = \cos\vartheta\,\mathfrak{i} + \sin\vartheta\,\mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{j}' = -\sin\vartheta\,\mathfrak{i} + \cos\vartheta\,\mathfrak{j}$$

Dann ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{j}'\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} = \cos\vartheta\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}\mathfrak{k} + \sin\vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j})$$
$$\bar{\mathfrak{T}} = \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k} = \cos\vartheta\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}\mathfrak{k} - \sin\vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}).$$

Der erste Teil ist der symmetrische Tensor

$$\mathfrak{T}_1 = \cos\vartheta\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}) + \mathfrak{k}\mathfrak{k},$$

der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $\cos\vartheta\,\mathfrak{i}$, $\cos\vartheta\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ verwandelt, der zweite Teil ist der antisymmetrische Tensor

$$\mathfrak{T}_2 = \sin\vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}),$$

der dem Vektor $\mathfrak{r}$ den Vektor

$$\mathfrak{r} \times | \frac{1}{2} \mathfrak{P}$$

zuordnet, wo

$$\mathfrak{P} = -2\sin\vartheta\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}$$
$$| \frac{1}{2} \mathfrak{P} = -\sin\vartheta\,\mathfrak{k},$$

also

$$\mathfrak{r} \times | \frac{1}{2} \mathfrak{P} = \sin\vartheta\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{r}$$

ist. Wenn der Drehungswinkel ϑ klein ist, so ist $1 - \cos\vartheta$ von zweiter Ordnung gegen $\sin\vartheta$. In dem Ausdruck für den Drehungstensor wollen wir dann $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta/2$ einführen und schreiben:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} + \sin\vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}) - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\,(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}).$$

Wenn man den Beitrag, den der mit dem Faktor $\sin^2\vartheta/2$ behaftete Teil bei der Bildung von $\mathfrak{r}' = \mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ hinzubringt, vernachlässigen kann, so wird

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} + \sin\vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j})$$

und, da man schon Glieder von zweiter Ordnung in ϑ vernachlässigt, so wird man für $\sin\vartheta$ den Winkel selbst setzen

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} + \vartheta\,(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}).$$

Der erste Teil $\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$ lässt bei der Bildung von $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ den Vektor $\mathfrak{r}$ ungeändert, so dass wir erhalten

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{r} = \mathfrak{r} + \vartheta\,(\mathfrak{j}x - \mathfrak{i}y)$$

oder

$$\mathfrak{T} = 1 + \mathfrak{T}_2,$$

wo $\mathfrak{T}_2$ den unendlich kleinen antisymmetrischen Tensor bedeutet und 1 für den Ausdruck

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k} \text{ oder } \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c}$$

geschrieben ist. In dieser Form kann also jeder unendlich kleine Drehungstensor ausgedrückt werden.

Wenn ein beliebiger Tensor $\mathfrak{T}$ sehr wenig von 1 verschieden ist, d. h. wenn $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ sehr wenig von $\mathfrak{r}$ abweicht, so ist $\mathfrak{T} - 1$ (wo 1 für $\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c}$ steht) ein kleiner Tensor. Wir zerlegen ihn in die Summe eines kleinen symmetrischen und eines kleinen antisymmetrischen Tensors

$$\mathfrak{T} - 1 = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$$

oder

$$\mathfrak{T} = 1 + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Nun ist $\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{T}_2$ ein Tensor, der von höherer Ordnung als $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ist. Wenn wir ihn gegen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ vernachlässigen können, so dürfen wir daher auch schreiben

$$\mathfrak{T} = 1 + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1 . \mathfrak{T}_2$$
$$= (1 + \mathfrak{T}_1)(1 + \mathfrak{T}_2),$$

worin nun $1 + \mathfrak{T}_1$ der symmetrische Teil des Tensors $\mathfrak{T}$ und $1 + \mathfrak{T}_2$ bis auf Grössen höherer Ordnung ein Drehungstensor ist, der aus dem antisymmetrischen Teil von $\mathfrak{T}$ durch Hinzufügung von 1 entspringt.

Damit haben wir hier die Zerlegung von $\mathfrak{T}$ in ein Produkt eines symmetrischen mit einem Drehungstensor in einfacher Weise aus der Zerlegung in eine Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors abgeleitet, die oben auf allgemeinere Weise als möglich nachgewiesen war.

Es seien x, y, z die Masszahlen eines veränderlichen Vektors $\mathfrak{r}$ in bezug auf drei voneinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}.$$

Aus diesen Masszahlen seien durch drei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ \eta &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ \zeta &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}$$

drei andere ξ, η, ζ abgeleitet, die in bezug auf dieselben Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu einem zweiten Vektor $\mathfrak{r}'$

$$\mathfrak{r}' = \xi\mathfrak{a} + \eta\mathfrak{b} + \zeta\mathfrak{c}$$

führen. Setzen wir für ξ, η, ζ ihre linearen Ausdrücke ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{r}' = x\mathfrak{e} + y\mathfrak{f} + z\mathfrak{g},$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} &= a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{f} &= a_{21}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{g} &= a_{31}\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}. \end{aligned}$$

D. h. der Übergang von $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{r}'$ ist durch den Tensor dargestellt

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*,$$

der die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ überführt. Setzen wir für $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ihre Ausdrücke in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein, so nimmt $\mathfrak{T}$ die Form an

$$\mathfrak{T} = a_{11}\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + a_{22}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + a_{33}\mathfrak{c}\mathfrak{c}^* + a_{23}\mathfrak{c}\mathfrak{b}^* + a_{32}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^* + a_{31}\mathfrak{a}\mathfrak{c}^* + a_{13}\mathfrak{c}\mathfrak{a}^* \\ + a_{12}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^* + a_{21}\mathfrak{a}\mathfrak{b}^*.$$

Die neun Masszahlen $a_{\alpha\beta}$ beziehen sich auf die neun Tensoren $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^*$, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}^*$ usw. aus denen $\mathfrak{T}$ numerisch abgeleitet ist.

Jedes System von drei beliebigen linearen Funktionen dreier Veränderlichen, die als Masszahlen in bezug auf drei voneinander

unabhängige Vektoren aufgefasst werden, entspricht somit einem bestimmten Tensor. Jeden Tensor können wir auf diese Weise aus irgendeinem System von drei voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entstehen lassen. Wir brauchen ihn nur auf die Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*$$

zu bringen, was immer möglich ist, in welcher Form auch $\mathfrak{T}$ gegeben sein möge, indem man in jedem Gliede die zweiten Vektoren durch $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ ausdrückt und die Glieder dann nach den zweiten Faktoren ordnet. Die Masszahlen der $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ in bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liefern dann mit Vertauschung der Reihen und Kolonnen die Koeffizienten der linearen Funktionen.

§ 13. Umklappungen und Drehungen.

Eine Umklappung um die $\mathfrak{i}$-Achse (d. h. eine Drehung um zwei Rechte) verwandelt die Vektoren $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $-\mathfrak{j}$, $-\mathfrak{k}$, während $\mathfrak{i}$ ungeändert bleibt. Sie wird demnach durch den Tensor

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} - \mathfrak{j}\mathfrak{j} - \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

dargestellt, wofür wir auch

$$2\mathfrak{i}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{i} - \mathfrak{j}\mathfrak{j} - \mathfrak{k}\mathfrak{k} \text{ oder } 2\mathfrak{i}\mathfrak{i} - 1$$

schreiben können. Für den Tensor $\mathfrak{T} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$ ist 1 geschrieben, weil er $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ wieder $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ entsprechen lässt und $\mathfrak{T}.\mathfrak{r}$ demnach $\mathfrak{r}$ ist. Zwei Umklappungen um verschiedene Achsen geben zusammengesetzt eine Drehung. Wir wollen die beiden Umklappungstensoren

$$2\mathfrak{i}\mathfrak{i} - 1 \text{ und } 2\mathfrak{i}'\mathfrak{i}' - 1$$

zusammensetzen zu dem Drehungstensor

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= (2\mathfrak{i}'\mathfrak{i}' - 1)(2\mathfrak{i}\mathfrak{i} - 1) \\ &= 4\mathfrak{i}'(\mathfrak{i}'.\mathfrak{i})\mathfrak{i} - 2\mathfrak{i}\mathfrak{i} - 2\mathfrak{i}'\mathfrak{i}' + 1. \end{aligned}$$

Wenn wir alle Terme als äussere Produkte ansehen, so verschwinden $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$ und wir erhalten die Plangrösse

$$4(\mathfrak{i}'.\mathfrak{i})\mathfrak{i}'\mathfrak{i}.$$

Wie wir oben fanden, steht diese Plangrösse senkrecht auf der Drehungsachse, die Drehung erfolgt im Umlaufsinn der entgegengesetzten Plangrösse

$$4(\mathfrak{i}'.\mathfrak{i})\mathfrak{i}\mathfrak{i}',$$

und ihr numerischer Wert ist gleich dem doppelten Sinus des Drehungswinkels (wobei wir die Drehung so ausgeführt denken, dass der Drehungswinkel kleiner als 180° ist). Bezeichnen wir den Winkel zwischen i unn i′, den wir kleiner oder gleich 90° voraussetzen können, weil wir statt i′ auch — i′ setzen können, ohne den Tensor zu ändern, mit α, so ist der numerische Wert von

$$4(i'.i)ii'$$

gleich $4\cos\alpha\sin\alpha = 2\sin 2\alpha$. Also ist der Winkel zwischen i und i′ gleich dem halben Drehungswinkel. Jede Drehung kann auf diese Weise durch zwei Umklappungen ersetzt werden. Man hat i und i′ nur so zu wählen, dass beide auf der Drehungsachse senkrecht stehen, dass sie von der Länge eins sind, den halben Drehungswinkel miteinander einschliessen (der kleiner oder gleich 180° vorausgesetzt werden kann), und so aufeinander folgen, dass der Umlaufsinn der Plangrösse ii′ den Drehungssinn angibt.

Eine Spiegelung an der jk-Ebene verwandelt i in — i, während j und k ungeändert bleiben. Sie entspricht daher dem Tensor

$$-ii + jj + kk \text{ oder } -2ii + 1.$$

Dieser Tensor ist dem der Umklappung $2ii - 1$ gerade entgegengesetzt. In dem Drehungstensor

$$\mathfrak{T} = (2i'i' - 1)(2ii - 1)$$

können wir nun beide Faktoren ins Entgegengesetzte verwandeln, ohne den Tensor zu ändern

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &= (-2i'i' + 1)(-2ii + 1)\\ &= 4i'(i'.i)i - 2ii - 2i'i' + 1.\end{aligned}$$

Mithin können die beiden Umklappungen um i und i′ auch durch Spiegelungen an den zu i und i′ senkrechten Ebenen ersetzt werden.

Wir wollen den Drehungstensor in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Teil spalten

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_1 &= 2(i'.i)(i'i + ii') - 2ii - 2i'i' + 1\\ \mathfrak{T}_2 &= 2(i'.i)(i'i - ii').\end{aligned}$$

Die Drehung ist mit der Plangrösse ii′ vollständig gegeben, deren numerischer Wert den Sinus des halben Drehungswinkels, deren Normale die Drehungsachse und deren Umlaufsinn den Drehungssinn bestimmt. Wir wollen diese Tatsache in den Ausdrücken für

$\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ in Evidenz setzen, in dem wir die Ergänzung der Plangrösse $\mathfrak{i}\mathfrak{i}'$ gleich $\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}' = \sin\vartheta/2\,\mathfrak{k}$ setzen und $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ einführen. Der Kürze halber wollen wir $\mathfrak{i}.\mathfrak{i}' = \cos\vartheta/2 = \varrho$ und $\sin\vartheta/2 = \sigma$ setzen. Dann ist

$$\mathfrak{i}' = \varrho\mathfrak{i} + \sigma\mathfrak{j}.$$

Diesen Ausdruck führen wir in $\mathfrak{T}_1$ für $\mathfrak{i}'$ ein und erhalten somit

$$\begin{aligned} 2\varrho(\mathfrak{i}'\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{i}') &= 4\varrho^2\mathfrak{i}\mathfrak{i} + 2\varrho\sigma(\mathfrak{j}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}) \\ 2\mathfrak{i}'\mathfrak{i}' &= 2\varrho^2\mathfrak{i}\mathfrak{i} + 2\varrho\sigma(\mathfrak{j}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}) + 2\sigma^2\mathfrak{j}\mathfrak{j} \\ \mathfrak{i}'\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{i}' &= \sigma(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}). \end{aligned}$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= -2\sigma^2(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}) + 1 = 1 - 2\sigma^2 + 2\sigma^2\mathfrak{k}\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{T}_2 &= 2\varrho\sigma(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}). \end{aligned}$$

Hiermit ist das Gewünschte erreicht. In dem Ausdruck für $\mathfrak{T}_1$ kommt nur der Vektor $\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}' = \sigma\mathfrak{k}$ und der numerische Wert σ vor. Die Transformation $\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r}$ besteht aus $(1 - 2\sigma^2)\mathfrak{r} + 2\sigma^2\mathfrak{k}(\mathfrak{k}.\mathfrak{r})$. Dadurch wird der Endpunkt P von $\mathfrak{r}$, wenn wir uns $\mathfrak{r}$ von O aus abgetragen denken, an die Drehungsachse im Verhältnis $1 - 2\sigma^2 = \varrho^2 - \sigma^2 = \cos\vartheta$ herangezogen. Das ist auch direkt an der Figur 33 zu bestätigen. Wenn nämlich $OQ/OP = \cos\vartheta$ gemacht wird, so ist $OQ = (1 - 2\sigma^2)\mathfrak{r}$, $QP = 2\sigma^2\mathfrak{r}$, $OS = \mathfrak{k}(\mathfrak{k}.\mathfrak{r})$, $QR:OS = QP:OP$, also $QR = 2\sigma^2\mathfrak{k}(\mathfrak{k}.\mathfrak{r})$ und mithin

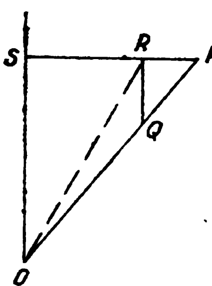


Fig. 33.

$$\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r} = OQ + QR = OR.$$

Andererseits ist $\mathfrak{T}_2.\mathfrak{r} = 2\varrho\sigma(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}).\mathfrak{r}$

$$= 2\varrho\sigma\mathfrak{r}\times\mathfrak{k}$$

nichts anderes als die vektorielle Multiplikation von $\mathfrak{r}$ mit $2\varrho\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}'$. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sind auf diese Weise beide durch die Zahl $\varrho = \cos\vartheta/2$ und den Vektor $\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}'$ ausgedrückt

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= 2\varrho^2 - 1 + 2(\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}')(\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}'), \\ \mathfrak{T}_2.\mathfrak{r} &= 2\varrho\mathfrak{r}\times(\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}'). \end{aligned}$$

Wenn man $\mathfrak{T}$ auf ein beliebiges System $\bar{\mathfrak{i}}, \bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}$ bezieht, so treten in $\mathfrak{T}$ ausser ϱ die drei Masszahlen der Plangrösse $\mathfrak{i}\mathfrak{i}'$ oder ihrer Ergänzung auf

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}' = \lambda\bar{\mathfrak{i}} + \mu\bar{\mathfrak{j}} + \nu\bar{\mathfrak{k}}.$$

Da der numerische Wert gleich σ ist, so haben wir

$$\varrho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Damit wird

$$\mathfrak{T}_1 = (2\varrho^2 - 1)(\bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{i}} + \bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{j}} + \bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{k}}) +$$
$$+ 2(\lambda^2\,\bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{i}} + \mu^2\,\bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{j}} + \nu^2\,\bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{k}}),$$
$$+ 2\mu\nu(\bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{k}} + \bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{j}}) + 2\nu\lambda(\bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{i}} + \bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{k}}) + 2\lambda\mu(\bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{j}} + \bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{i}}),$$

und

$$\mathfrak{T}_2 = -2\varrho[\lambda(\bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{k}} - \bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{j}}) + \mu(\bar{\mathfrak{k}}\,\bar{\mathfrak{i}} - \bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{k}}) + \nu(\bar{\mathfrak{i}}\,\bar{\mathfrak{j}} - \bar{\mathfrak{j}}\,\bar{\mathfrak{i}})].$$

Das System der neun Masszahlen wird somit gleich

$$\begin{array}{lll} (2\varrho^2 - 1) + 2\lambda^2, & 2\lambda\mu + 2\varrho\nu, & 2\nu\lambda - 2\varrho\mu \\ 2\lambda\mu - 2\varrho\nu, & 2\varrho^2 - 1 + 2\mu^2, & 2\mu\nu + 2\varrho\lambda \\ 2\nu\lambda + 2\varrho\mu, & 2\mu\nu - 2\varrho\lambda, & 2\varrho^2 - 1 + 2\nu^2. \end{array}$$

Diese neun Grössen sind die Masszahlen der drei Vektoren, in welche $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ bei der Drehung übergehen. Sie geben die Transformation des einen rechtwinkligen Koordinatensystems in das andere, um in der Sprache der gewöhnlichen analytischen Geometrie zu reden und sind in dieser Form schon von Euler angegeben worden. Vektoranalytisch sind sie in dem Ausdruck

$$\mathfrak{T} = (2\varrho^2 - 1) + 2(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}')(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}') + 2\varrho(\mathfrak{i}'\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{i}')$$

enthalten, den man auf ein beliebiges System von Vektoren beziehen kann.

Bei einer affinen Transformation mögen die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ verwandelt werden, so dass ihr der Tensor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*$$

entspricht. Die Plangrössen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gehen dann in die Plangrössen $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ über; aber die Ergänzungen der Plangrössen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ brauchen nicht etwa in die Ergänzungen von $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ überzugehen. Denn ein Vektor, der auf einer Plangrösse senkrecht steht, wird nach der Transformation im allgemeinen nicht mehr auf der transformierten senkrecht stehen. Die Beziehung also zwischen der Ergänzung einer Plangrösse $\mathfrak{P}$ und der Ergänzung der Plangrösse $\mathfrak{P}'$, in die sie durch die Transformation übergeht, wird nicht durch den Tensor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*$$

vermittelt, sondern durch einen anderen Tensor, der die Vektoren

$\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ in die Vektoren $\mathfrak{f}\times\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}\times\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\times\mathfrak{f}$ überführt. Nun ist $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}=\mathfrak{a}^*(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ usw. Also können wir diesen Tensor schreiben

$$\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}(\mathfrak{e}^*\mathfrak{a}+\mathfrak{f}^*\mathfrak{b}+\mathfrak{g}^*\mathfrak{c}).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist konjugiert zu dem Tensor

$$\mathfrak{T}^{-1}=\mathfrak{a}\mathfrak{e}^*+\mathfrak{b}\mathfrak{f}^*+\mathfrak{c}\mathfrak{g}^*,$$

der die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ verwandelt und demnach zu $\mathfrak{T}$ reziprok ist. Wir können somit schreiben

$$\overline{\mathfrak{T}}^{-1}=\mathfrak{e}^*\mathfrak{a}+\mathfrak{f}^*\mathfrak{b}+\mathfrak{g}^*\mathfrak{c}.$$

Der Tensor, der bei einer affinen Transformation $\mathfrak{T}$, die Ergänzung einer Plangrösse in die Ergänzung der transformierten Plangrösse verwandelt, ist also gleich dem Verhältnis $\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, in dem sich ein Rauminhalt ändert, mal dem Tensor $\overline{\mathfrak{T}}^{-1}$, d. h. dem Tensor, der dem zu $\mathfrak{T}$ reziproken konjugiert oder, wie wir auch sagen können, dem zu $\mathfrak{T}$ konjugierten Tensor reziprok ist. Denn der zu $\mathfrak{T}$ konjugierte Tensor

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{e}+\mathfrak{b}^*\mathfrak{f}+\mathfrak{c}^*\mathfrak{g}$$

verwandelt $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ in $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, der zu ihm reziproke also $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ in $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ und hat mithin die Gestalt

$$\mathfrak{e}^*\mathfrak{a}+\mathfrak{f}^*\mathfrak{b}+\mathfrak{g}^*\mathfrak{c}.$$

Bei einem symmetrischen Tensor ist $\mathfrak{T}=\overline{\mathfrak{T}}$, also $\overline{\mathfrak{T}}^{-1}=\mathfrak{T}^{-1}$; hier verwandelt also der reziproke Tensor die Ergänzung einer Plangrösse in die Ergänzung der transformierten Plangrösse, wenn wir von dem numerischen Faktor $\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ absehen, der noch eine geometrisch ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung bedeuten würde, zu der noch eine Inversion hinzutritt, wenn $\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ negativ ist, d. h. wenn der Windungssinn dreier Vektoren bei der Transformation geändert wird.

Betrachten wir z. B. eine Kugel, die durch einen symmetrischen Tensor in ein Ellipsoid von gleichem Rauminhalt übergeführt wird, ohne Änderung des Windungssinnes. Ein Element der Kugeloberfläche geht in ein Element des Ellipsoids über; aber die Nor-

male des Kugelelementes geht nicht in die Normale des letzteren über, sondern in den zugehörigen Durchmesser. Dagegen verwandelt der reziproke Tensor die Normale der Kugel in die Normale des Ellipsoides für den betrachteten Punkt und das Längenverhältnis ist dabei das gleiche wie das der Oberflächenelemente.

Bei einer Drehung oder einer mit einer Inversion verbundenen Drehung $\mathfrak{T}$ ist, wie wir oben sahen, der konjugierte Tensor $\overline{\mathfrak{T}}$ mit dem reziproken identisch und daher $\overline{\mathfrak{T}}^{-1} = \mathfrak{T}$ und zugleich $\mathfrak{efg} = \pm \mathfrak{abc}$. Je nachdem eine Inversion zu der Drehung hinzutritt oder nicht, wird also die Ergänzung einer Plangrösse dabei der Ergänzung der transformierten Plangrösse entgegengesetzt oder gleich sein. Man erkennt, dass dieser Fall nur bei diesen Tensoren auftreten kann. Denn aus $\overline{\mathfrak{T}}^{-1} = \mathfrak{T}$ folgt $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}^{-1}$, was bei keinen anderen Tensoren zutrifft.

§ 14. Tensorfelder.

Ebenso wie wir von dem Begriff des Vektors zu dem Begriff des Vektorfeldes aufgestiegen sind, so führen wir jetzt auch den Begriff des Tensorfeldes ein. In jedem Punkte des Raumes oder eines Teiles des Raumes denken wir uns einen Tensor gegeben; von Punkt zu Punkt aber kann er sich verändern. Einem irgendwelchen Spannungen unterworfenen elastischen Körper z. B. entspricht ein Tensorfeld von symmetrischen Tensoren, die seinen Spannungszustand in jedem Punkte darstellen. Würde er in jedem seiner Teilchen in derselben Weise beansprucht, so wäre der Tensor überall derselbe, das Tensorfeld wäre konstant. Im allgemeinen aber ändert es sich von Punkt zu Punkt. Denken wir uns den symmetrischen Tensor, der zu irgendeinem Punkte gehört, auf die Form

$$\mathfrak{T} = \lambda_1 \mathfrak{ii} + \lambda_2 \mathfrak{jj} + \lambda_3 \mathfrak{kk}$$

gebracht, so stellen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Hauptspannungsrichtungen dar. Auf eine Plangrösse

$$d\mathfrak{S}_1 = d\omega\,\mathfrak{jk}$$

von der Grösse $d\omega$ wirkt die auf ihr senkrechte Kraft

$$\mathfrak{T}d\mathfrak{S}_1 = \overline{\mathfrak{T}}.d\omega\mathfrak{i} = \lambda_1 d\omega\mathfrak{i}.$$

Ein positiver Wert von λ_1 würde eine Kraft bedeuten, die in der Richtung der Ergänzung von $d\mathfrak{S} = d\omega\,\mathfrak{jk}$ wirkt. Wenn wir

also die Festsetzung gemacht haben, dass beim Durchschneiden des Körpers die Plangrösse so umlaufen wird, dass der stehengebliebene Teil des Körpers auf ihrer positiven Seite liegt, so bedeutet ein positiver Wert von λ_1 einen Druck, ein negativer einen Zug. Ebenso erfährt die Plangrösse $d\omega\mathfrak{k}\mathfrak{i}$ die Kraft

$$\mathfrak{T}d\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{T}.d\omega\mathfrak{j} = \lambda_2 d\omega\mathfrak{j},$$

die Plangrösse $d\omega\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ die Kraft

$$\mathfrak{T}d\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{T}.d\omega\mathfrak{k} = \lambda_3 d\omega\mathfrak{k}.$$

Auf diesen drei Plangrössen steht jedesmal die zugehörige Kraft senkrecht. Für irgendeine andere unendlich kleine Plangrösse $d\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{T}d\mathfrak{S}$ die an ihr angreifende Kraft. Denn die Plangrösse $d\mathfrak{S}$ lässt sich als eine der vier Begrenzungsflächen eines Tetraeders auffassen, dessen andere Begrenzungsflächen $d\mathfrak{S}_1$, $d\mathfrak{S}_2$, $d\mathfrak{S}_3$ parallel $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ sind. Nehmen wir bei allen vier Flächen den Umlaufsinn derart, dass das Tetraeder auf der positiven Seite liegt, so ist

$$d\mathfrak{S} + d\mathfrak{S}_1 + d\mathfrak{S}_2 + d\mathfrak{S}_3 = 0$$

und somit

$$\mathfrak{T}d\mathfrak{S} + \mathfrak{T}d\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{T}d\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{T}d\mathfrak{S}_3 = 0.$$

Die letzten drei Terme sind die an den entsprechenden Flächen angreifenden Kräfte. Da die an $d\mathfrak{S}$ angreifende Kraft mit diesen im Gleichgewicht steht, so ist sie mithin gleich $\mathfrak{T}d\mathfrak{S}$.

Ebenso bestimmt die Deformation des Körpers an jeder Stelle ein Tensorfeld. Betrachten wir nämlich einen Punkt O des Körpers im undeformierten Zustande und denken uns drei sehr kleine voneinander unabhängige Vektoren $\varepsilon\mathfrak{a}$, $\varepsilon\mathfrak{b}$, $\varepsilon\mathfrak{c}$ von O aus abgetragen, so werden die materiellen Punkte des Körpers, die auf diesen Strecken liegen, nach der Deformation drei andere sehr kleine Vektoren $\varepsilon\mathfrak{e}$, $\varepsilon\mathfrak{f}$, $\varepsilon\mathfrak{g}$ bilden. Die ganze Deformation der Nachbarschaft von O ist in erster Annäherung affin und wird daher durch den Tensor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{c}^*$$

dargestellt, der die Vektoren $\varepsilon\mathfrak{a}$, $\varepsilon\mathfrak{b}$, $\varepsilon\mathfrak{c}$ in $\varepsilon\mathfrak{e}$, $\varepsilon\mathfrak{f}$, $\varepsilon\mathfrak{g}$ verwandelt. Die Kleinheit der Vektoren werfen wir dabei in die Kleinheit von ε, so dass der Tensor aus endlichen Vektoren gebildet ist.

Es sei die Deformation eines Körpers dadurch gegeben, dass in jedem seiner ursprünglichen Punkte der Vektor $\mathfrak{s}$ angegeben sei,

der die Verschiebung des Punktes in seine neue Lage darstellt. Denken wir uns $\mathfrak{s}$ als Funktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ gegeben, der von einem festen Punkte O zu dem betrachteten Punkte führt, so wird der unendlich kleinen Änderung $d\mathfrak{r}$ eine unendlich kleine Änderung $d\mathfrak{s}$ entsprechen. Wie auch die Beziehung zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ gestaltet sein möge, so wird die Beziehung zwischen den unendlich kleinen Vektoren durch lineare Gleichungen zwischen ihren Masszahlen ausgedrückt, und demnach die Beziehung zwischen $d\mathfrak{s}$ und $d\mathfrak{r}$ durch einen Tensor $\mathfrak{T}$, so dass

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{T}.d\mathfrak{r}.$$

Wir können $\mathfrak{T}$ als ein Analogon zum Differentialquotienten betrachten, nur dass es sich hier um die Abhängigkeit zwischen zwei Vektoren handelt, die differenziert wird. Wenn nun der Verschiebungsvektor $\mathfrak{s}$ von dem betrachteten Punkte P bis Q führt, wenn ferner $d\mathfrak{r}$ von P zu P' und $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s} + d\mathfrak{s}$ von P' zu Q' führt (Fig. 34), so ist der Vektor QQ' gleich

$$d\mathfrak{r} + d\mathfrak{s} = (1 + \mathfrak{T}).d\mathfrak{r}.$$

Der Tensor $1 + \mathfrak{T}$ drückt also die Beziehung zwischen dem undeformierten Vektor PP' und dem deformierten QQ' aus. Wünschen wir diesen Tensor $1 + \mathfrak{T}$ für die numerische Rechnung auf ein System $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ zu beziehen, so haben wir zunächst $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ aus $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ numerisch abgeleitet zu denken

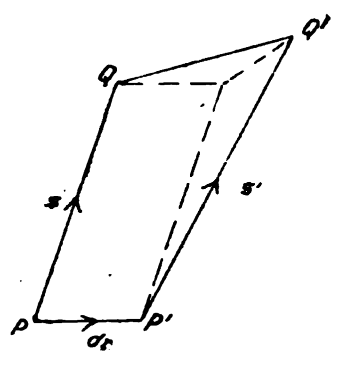


Fig. 34.

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{s} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k},$$

und haben u, v, w als Funktionen von x, y, z zu setzen. Die drei Vektoren

$$dx\,\mathfrak{i},\quad dy\,\mathfrak{j},\quad dz\,\mathfrak{k}$$

verwandeln sich durch den Tensor $\mathfrak{T}$ in

$$\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}dx,\quad \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}dy,\quad \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}dz.$$

Mithin ist $$\mathfrak{T} = \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\mathfrak{k}$$

und $$1+\mathfrak{T}=\left(\mathfrak{i}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\right)\mathfrak{i}+\left(\mathfrak{j}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\right)\mathfrak{j}+\left(\mathfrak{k}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\right)\mathfrak{k}.$$

Die neun Masszahlen des Tensors $1+\mathfrak{T}$ sind demnach in bezug auf $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$

$$\begin{matrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & 1+\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & 1+\frac{\partial w}{\partial z}. \end{matrix}$$

Wir zerlegen $1+\mathfrak{T}$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil

$$1+\mathfrak{T}=1+\mathfrak{T}_1+\mathfrak{T}_2,$$

wo $$\mathfrak{T}_1=\frac{\mathfrak{T}+\overline{\mathfrak{T}}}{2},\quad \mathfrak{T}_2=\frac{\mathfrak{T}-\overline{\mathfrak{T}}}{2}.$$

Sind $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ klein genug, um Vektoren, die gegen $\mathfrak{T}_1.\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{T}_2.\mathfrak{r}$ von zweiter Ordnung sind, zu vernachlässigen, so können wir, wie schon oben bemerkt

$$1+\mathfrak{T}=(1+\mathfrak{T}_1)(1+\mathfrak{T}_2)$$

oder auch

$$=(1+\mathfrak{T}_2)(1+\mathfrak{T}_1)$$

setzen und $1+\mathfrak{T}_2$ als Drehungstensor auffassen. Da eine Drehung die Entfernung irgend zweier Punkte ungeändert lässt, also den Körper nicht deformiert, so können wir

$$1+\mathfrak{T}_1$$

als den Deformationstensor bezeichnen. Wie oben gezeigt, können wir $\mathfrak{T}_1$ auf die Form bringen

$$\lambda_1\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'+\lambda_2\mathfrak{j}'\mathfrak{j}'+\lambda_3\mathfrak{k}'\mathfrak{k}'.$$

$1+\mathfrak{T}_1$ erhält somit die Form

$$(1+\lambda_1)\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'+(1+\lambda_2)\mathfrak{j}'\mathfrak{j}'+(1+\lambda_3)\mathfrak{k}'\mathfrak{k}',$$

d. h. die Deformation des Körperelementes besteht in den drei Dehnungen ($\lambda>0$) oder Pressungen ($\lambda<0$) längs den drei durch $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ bestimmten Achsen. Die ganze Ortsveränderung des den Endpunkt P von $\mathfrak{r}$ umgebenden Elements besteht also in der Parallelverschiebung von P nach Q in der Drehung $1+\mathfrak{T}_2$ und in

diesen Dehnungen oder Pressungen $1+\mathfrak{T}_1$. Die Summe der drei Dehnungen oder Pressungen

$$1+\lambda_1+1+\lambda_2+1+\lambda_3$$

ist gleich dem Wert, den wir aus jeder Form des Tensors $1+\mathfrak{T}$ erhalten, wenn wir in allen Gliedern die beiden Vektoren skalar miteinander multiplizieren, also gleich

$$\left(\mathfrak{i}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\right).\mathfrak{i}+\left(\mathfrak{j}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\right).\mathfrak{j}+\left(\mathfrak{k}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\right).\mathfrak{k},$$

d. i. gleich

$$1+\frac{\partial u}{\partial x}+1+\frac{\partial v}{\partial y}+1+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{oder}\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla.\mathfrak{s}.$$

Das Verhältnis der Raumtransformation für den Tensor $1+\mathfrak{T}$ ist gleich dem äusseren Produkt

$$\left(\mathfrak{i}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\right)\left(\mathfrak{j}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\right)\left(\mathfrak{k}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\right).$$

Vernachlässigt man beim Ausmultiplizieren die Grössen zweiter Ordnung, so erhält man

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\mathfrak{i}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\mathfrak{k}+\mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z},$$

d. h. gleich

$$1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),$$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla.\mathfrak{s}$ ist also der Bruchteil, um den das Volumteilchen bei P vergrössert oder verkleinert wird, je nachdem $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ positiv oder negativ ist.

Betrachten wir z. B. den Fall, dass

$$\mathfrak{s}=\varepsilon\,\mathfrak{i}(\mathfrak{k}.\mathfrak{r}),$$

d. h. es sollen alle Punkte der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Ebene ($\mathfrak{k}.\mathfrak{r}=0$) unverschoben bleiben, dagegen jeder Punkt P ausserhalb der Ebene um den Be-

trag $\varepsilon(\mathfrak{k}.\mathfrak{r}) = \varepsilon z$ also proportional seinem Abstande z von der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Ebene aber auf den beiden Seiten entgegengesetzt parallel $\mathfrak{i}$ verschoben werden (Fig. 35). Dann ist

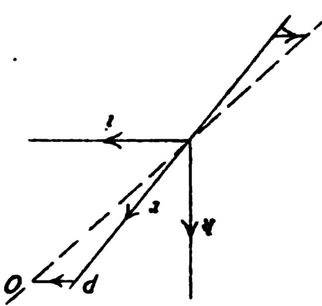


Fig. 35.

$$d\mathfrak{s} = \varepsilon\mathfrak{i}(\mathfrak{k}.d\mathfrak{r}),$$

also
$$1 + \mathfrak{T} = 1 + \varepsilon\mathfrak{i}\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}),$$

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{i}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{i}).$$

Ein Würfel, dessen eine Ecke in O liegt und dessen Kanten von O ausgehend die Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ beschreiben, wird dabei in ein Parallelepipedon verwandelt. Die Ecke O sowie die von O ausgehenden Kanten parallel $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ bleiben liegen. Die Kante parallel $\mathfrak{k}$ verwandelt sich in $(1 + \mathfrak{T})\mathfrak{k} = \mathfrak{k} + \varepsilon\mathfrak{i}$. Man nennt das eine Scherung des Körpers. Diese Veränderung des Würfels können wir, wenn ε so klein ist, dass Glieder zweiter Ordnung in ε nicht in Betracht kommen, aus einer Drehung $1 + \mathfrak{T}_2$ um die $\mathfrak{j}$-Achse im Umlaufsinn von $\mathfrak{k}\mathfrak{i}$ und dem Drehungswinkel $\varepsilon/2$ einerseits und andererseits aus der Deformation

$$1 + \mathfrak{T}_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}) = \left(\mathfrak{i} + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{k}\right)\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \left(\mathfrak{k} + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{i}\right)\mathfrak{k},$$

die $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{i} + \frac{\varepsilon}{2}$ und $\mathfrak{k} + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{i}$ verwandelt und $\mathfrak{j}$ ungeändert lässt, zusammensetzen. Dieser Deformationstensor lässt sich auch in der Form schreiben

$$(1 + \varepsilon/2)\frac{(\mathfrak{i} + \mathfrak{k})(\mathfrak{i} + \mathfrak{k})}{2} + (1 - \varepsilon/2)\frac{(\mathfrak{k} - \mathfrak{i})(\mathfrak{k} - \mathfrak{i})}{2} + \mathfrak{j}\mathfrak{j},$$

d. h. er verwandelt das sich selbst reziproke System $\frac{\mathfrak{i} + \mathfrak{k}}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{j}$, $\frac{\mathfrak{k} - \mathfrak{i}}{\sqrt{2}}$ in $(1 + \varepsilon/2)\frac{\mathfrak{i} + \mathfrak{k}}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{j}$, $(1 - \varepsilon/2)\frac{\mathfrak{k} - \mathfrak{i}}{\sqrt{2}}$, oder er besteht in der Dehnung $1 + \varepsilon/2$, parallel $\mathfrak{i} + \mathfrak{k}$ und der Pressung $1 - \varepsilon/2$ parallel $\mathfrak{k} - \mathfrak{i}$ (Fig. 36). Das Verhältnis entsprechender Volumina ist

$$\frac{(\mathfrak{i} + \varepsilon/2\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{j}\,(\mathfrak{k} + \varepsilon/2\,\mathfrak{i})}{\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}} = 1 - \varepsilon^2/_4,$$

d. h. wenn man von Grössen zweiter Ordnung absieht, so wird das Volumen durch die Deformation nicht geändert. Wir haben es nur mit einer Formänderung, nicht mit einer Volumänderung des Würfels zu tun.

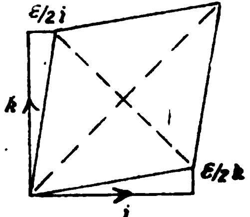


Fig. 36.

Betrachten wir andererseits den Fall, dass der Verschiebungsvektor $\mathfrak{s}$

$$\mathfrak{s} = \varepsilon\mathfrak{k}(\mathfrak{k}\,.\,\mathfrak{r}).$$

Dabei bleiben wieder alle Punkte der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Ebene ($\mathfrak{k}\,.\,\mathfrak{r} = 0$) unverschoben; jeder Punkt P ausserhalb der Ebene wird parallel $\mathfrak{k}$, also senkrecht zur Ebene, um den Betrag $\varepsilon(\mathfrak{k}\,.\,\mathfrak{r}) = \varepsilon z$, d. h. proportional zu seinem Abstande von der Ebene aber auf den beiden Seiten entgegengesetzt verschoben.

Dann ist

$$d\mathfrak{s} = \varepsilon\mathfrak{k}(\mathfrak{k}\,.\,d\mathfrak{r}),$$

also

$$1 + \mathfrak{T} = 1 + \varepsilon\mathfrak{k}\mathfrak{k} = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + (1 + \varepsilon)\mathfrak{k}\mathfrak{k}.$$

Das ist ein symmetrischer Tensor, der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $(1 + \varepsilon)\,\mathfrak{k}$ verwandelt. Das Verhältnis entsprechender Räume ist $1 + \varepsilon$.

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Tensor

$$1 + \mathfrak{T} = 1 + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}\mathfrak{k}$$

und seinem symmetrischen Teil

$$1 + \mathfrak{T}_1 = 1 + \frac{\mathfrak{T} + \bar{\mathfrak{T}}}{2}$$

zurück. Er lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} 1 + \mathfrak{T}_1 = {} & \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathfrak{k}\mathfrak{k} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)(\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}). \end{aligned}$$

Wenn nun wieder $\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial z}$ so klein sind, dass die Qua-

drate ihrer Masszahlen vernachlässigt werden können, dann lässt sich $1 + \mathfrak{T}_1$ in ein Produkt von den sechs Tensoren zerlegen

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{i}\mathfrak{i},\ 1 + \frac{\partial v}{\partial y}\mathfrak{j}\mathfrak{j},\ 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}),\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)(\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}),$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}),$$

die in irgendeiner Reihenfolge hintereinander angewendet werden; denn beim Ausmultiplizieren geht das Produkt, wenn man nur die Grössen erster Ordnung beibehält, in $1 + \mathfrak{T}_1$ über. Drei von ihnen sind von dem Typus

$$1 + \varepsilon\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

und drei von dem Typus

$$1 + \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}).$$

Bei einem elastischen Körper bestehen zwischen den sechs Masszahlen des Deformationstensors und den sechs Masszahlen des Spannungstensors Beziehungen, durch welche die einen durch die anderen berechnet werden können. Für hinreichend kleine Deformationen kann man die Beziehungen als linear ansehen. Sie vereinfachen sich bedeutend, wenn der Körper homogen und isotrop ist. Denn in diesem Fall wird der Deformationstensor $\mathfrak{T}_1$ für ein System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, für das der Spannungstensor auf die Form

$$\lambda_1\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \lambda_2\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \lambda_3\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

gebracht ist, ebenfalls dieselbe Form

$$\mu_1\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mu_2\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mu_3\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

annehmen müssen und die Einwirkung von μ_2 und μ_3 auf λ_1 wird aus Symmetriegründen die gleiche sein, sowie gleich der von μ_3 und μ_1 auf λ_2 und von μ_1 und μ_2 auf λ_3.

Aus der Gleichung

$$\lambda_1 = a\mu_1 + b(\mu_2 + \mu_3)$$

müssen aus Symmetriegründen, weil in den verschiedenen Richtungen die elastischen Eigenschaften dieselben sein sollen, die anderen beiden durch zyklische Vertauschung der Indices hervorgehen. Diese Gleichungen können wir auch in der Form schreiben

$$\lambda_\alpha = (a - b)\,\mu_\alpha + b\,(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3).$$

Bezeichnen wir den Spannungstensor mit $\mathfrak{S}$, so wird demnach

$$\mathfrak{S} = (a - b)\,\mathfrak{T}_1 + b\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}).$$

Dabei kann jetzt $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ irgendein beliebiges, zu sich selbst reziprokes System sein und u, v, w, x, y, z die zugehörigen Masszahlen von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$. Denn in jedem dieser Systeme hat $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ denselben Wert. Bezieht man $\mathfrak{T}_1$ auch auf dieses System $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, so erhält man die sechs Masszahlen des Tensors $\mathfrak{S}$, ausgedrückt durch die sechs Masszahlen von $\mathfrak{T}_1$. Schreiben wir $\nabla . \mathfrak{s}$ für $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, so nehmen die sechs Masszahlen von $\mathfrak{S}$ die Form an

$$(a - b)\frac{\partial u}{\partial x} + b\nabla . \mathfrak{s},\quad (a - b)\frac{\partial v}{\partial y} + b\nabla . \mathfrak{s},\quad (a - b)\frac{\partial w}{\partial z} + b\nabla . \mathfrak{s},$$

$$\frac{a - b}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{a - b}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \frac{a - b}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

und die Spannung für eine durch den betrachteten Punkt gelegte Plangrösse $d\mathfrak{F}$ wird, wenn $d\omega\mathfrak{n}$ die Ergänzung der Plangrösse und $d\omega$ ihr numerischer Wert ist, auf die Flächeneinheit berechnet gleich

$$\mathfrak{S}.\mathfrak{n} = (a - b)\,\mathfrak{T}_1 . \mathfrak{n} + b(\nabla . \mathfrak{s})\mathfrak{n}.$$

Die Spannung $\mathfrak{S}.\mathfrak{n}$ lässt sich also für die verschiedenen Richtungen der Normale $\mathfrak{n}$ von der Länge eins so beschreiben: Sie besteht aus zwei Teilen, der eine ist der Vektor in den sich $(a - b)\,\mathfrak{n}$ bei der Transformation $\mathfrak{T}_1$ verwandelt, der andere ist proportional $\mathfrak{n}$.

Die Strömung einer Flüssigkeit sei dadurch gegeben, dass das Vektorfeld seiner Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als Funktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ jedes Punktes bestimmt ist. In dem Zeitteilchen dt ist dann der Verschiebungsvektor, den wir bei der Betrachtung der Deformation eines elastischen Körpers mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet hatten, gleich

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\,dt.$$

Der Vektor $d\mathfrak{r}$ geht demnach in dem Zeitteilchen dt in den Vektor $d\mathfrak{r} + d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{v}\,dt$ über, wo $d\mathfrak{v}$ die Änderung, die bei fest-

gehaltener Zeit der Änderung $d\mathfrak{r}$ entspricht. Der Übergang von dem Vektor $d\mathfrak{r}$ zu $d\mathfrak{v}$ werde durch den Tensor $\mathfrak{T}$ vermittelt

$$d\mathfrak{v} = \mathfrak{T}.d\mathfrak{r}.$$

Dann ist
$$d\mathfrak{r} + d\mathfrak{s} = (1 + \mathfrak{T}dt).d\mathfrak{r}.$$

Den Tensor $\mathfrak{T}$ zerlegen wir wieder in einen symmetrischen Teil $\mathfrak{T}_1$ und einen antisymmetrischen Teil $\mathfrak{T}_2$ und schreiben

$$1 + \mathfrak{T}_1 dt + \mathfrak{T}_2 dt$$

in der Form eines Produktes

$$(1 + \mathfrak{T}_1 dt)(1 + \mathfrak{T}_2 dt) \text{ oder auch } (1 + \mathfrak{T}_2 dt)(1 + \mathfrak{T}_1 dt).$$

Der Tensor $1 + \mathfrak{T}_1 dt$ bedeutet eine reine Deformation ohne Drehung, während $1 + \mathfrak{T}_2 dt$ eine unendlich kleine Drehung ausdrückt. Wenn wir für die Zwecke der Rechnung die beiden Tensoren auf ein System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ beziehen wollen, so haben wir zu setzen

$$\mathfrak{v} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}.$$

Soll nun

$$d\mathfrak{v} = \mathfrak{T}.d\mathfrak{r}$$

sein, so verwandelt $\mathfrak{T}$ die Vektoren $dx\mathfrak{i}$, $dy\mathfrak{j}$, $dz\mathfrak{k}$ in $\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}dx$, $\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y}dy$, $\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z}dz$, also ist

$$\mathfrak{T} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z}\mathfrak{k}$$

und daher

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathfrak{k}\mathfrak{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j})$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)(\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}),$$

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)(\mathfrak{k}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{k}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)(\mathfrak{i}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{i})$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{\partial x} - \frac{du}{\partial y}\right)(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}).$$

Der Drehungstensor

$$1 + \mathfrak{T}_2 dt$$

dreht das Flüssigkeitselement, wie wir oben gesehen haben, um eine Achse, die auf der Plangrösse

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dt\mathfrak{k}\mathfrak{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{\partial x}-\frac{du}{\partial y}\right)dt\mathfrak{i}\mathfrak{j}$$
$$=\frac{1}{2}\nabla\mathfrak{v}dt$$

senkrecht steht, um einen Winkel $d\vartheta$, der gleich ihrem numerischen Wert ist, und in einem Drehungssinn, der gleich dem Umlaufsinn der Plangrösse ist. Dividieren wir durch dt, so tritt an Stelle des Winkels $d\vartheta$ die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$. Die Plangrösse

$$\frac{1}{2}\nabla\mathfrak{v}$$

oder ihre Ergänzung

$$\frac{1}{2}\nabla\times\mathfrak{v}$$

bezeichnet also Drehungsachse, Umlaufsinn und Drehungsgeschwindigkeit. Der Vektor $\nabla\times\mathfrak{v}$, dessen Eigenschaften wir schon oben studiert haben, wird aus diesem Grunde die „Rotation der Flüssigkeit“ genannt [1]).

Der Tensor $(1+\mathfrak{T}_1 dt)$ ändert das Volumen im Verhältnis $1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt=1+\nabla.\mathfrak{v}\,dt$, so dass $\nabla.\mathfrak{v}\,dt$ die Änderung der Volumeinheit in der Zeit dt und $\nabla.\mathfrak{v}$ die Änderungsgeschwindigkeit ausdrückt. Ist ϱ die Dichtigkeit des betrachteten Flüssigkeitsteilchens zurzeit t und $\varrho+d\varrho$ seine Dichtigkeit zurzeit $t+dt$, so muss die Masse auf die Volumeinheit bezogen einerseits gleich ϱ, andererseits gleich $(\varrho+d\varrho)(1+\nabla.\mathfrak{v}dt)$, also

$$\varrho=\varrho+\varrho\nabla.\mathfrak{v}\,dt+d\varrho$$

sein, d. h. es ist, wie wir schon oben fanden

$$\nabla.\mathfrak{v}=-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}.$$

§ 15. Tensorintegrale.

Der Begriff des Tensorfeldes, der zu dem des Vektorfeldes und des Plangrössenfeldes hinzugetreten ist, gibt Anlass, die drei oben

[1]) Manche Schriftsteller schreiben daher für den Vektor $\nabla\times\mathfrak{v}$ eines beliebigen Feldes rot $\mathfrak{v}$. Maxwell schreibt curl $\mathfrak{v}$ (das Quirlen der Flüssigkeit).

abgeleiteten Theoreme über die Umwandlungen der Oberflächenintegrale

$$\int \mathfrak{f}\,d\mathfrak{S},\quad \int \mathfrak{p}\,d\mathfrak{S},\quad \int \mathfrak{F}\,d\mathfrak{S}$$

in Raumintegrale durch ein viertes zu ergänzen, bei dem das Oberflächenintegral

$$\int \mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$$

in ein Raumintegral verwandelt wird. $\mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$ ist dabei ein Vektor, der dem Oberflächenelement $d\mathfrak{S}$ zugeordnet ist, $d\mathfrak{S}$ so genommen, dass das Innere auf der positiven Seite von $d\mathfrak{S}$ liegt. Ist $\mathfrak{T}$ z. B. das Tensorfeld der Spannungen in einem irgendwie beanspruchten elastischen Körper, so sind $\mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$ die Kräfte auf den Begrenzungselementen $d\mathfrak{S}$, die man für irgendeinen herausgeschnittenen Teil des elastischen Körpers auf der Begrenzung dieses Teils anbringen muss, um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten. Die Umwandlung in ein Raumintegral geschieht in derselben Weise wie in den drei anderen Fällen, indem man sich den Raum in kleine Parallelepipeda zerschnitten denkt und die Integration

$$\int \mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$$

über die Begrenzungen aller Teile ausdehnt. Jedes Element der Oberfläche, das nicht der ursprünglichen Oberfläche des Raumes angehört, kommt dabei zweimal mit entgegengesetztem Umlaufsinn vor, so dass die beiden entsprechenden Elemente $\mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$ sich gegenseitig aufheben und das Gesamtintegral über die Oberflächen aller Teile daher gleich dem ursprünglichen Oberflächenintegral ist.

Die Integration über ein Parallelepipedon, dessen von einer Ecke mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}$$

ausgehende Kanten durch die Vektoren

$$\Delta x\mathfrak{a},\quad \Delta y\mathfrak{b},\quad \Delta z\mathfrak{c},$$

(wo $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ rechtsgewunden vorausgesetzt sei), gebildet werden, geschieht wieder durch Zusammenfassung je zweier paralleler Begrenzungsflächen, z. B. der beiden, die den Plangrössen

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}\Delta y\Delta z \quad \text{und} \quad -\mathfrak{b}\mathfrak{c}\Delta y\Delta z$$

entsprechen. Für die erste ist $\mathfrak{r}.\mathfrak{a}^* = x$, für die zweite $\mathfrak{r}.\mathfrak{a}^* =$

$x + \Delta x$. Die beiden Teile des Oberflächenintegrals ergeben demnach in erster Annäherung

$$-\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} \mathfrak{b}\mathfrak{c} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Unter $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}$ ist der Tensor zu verstehen, den man erhält, wenn man von dem Tensor an der Stelle $x + \Delta x$, y, z den Tensor an der Stelle x, y, z abzieht, durch Δx dividiert und zur Grenze übergeht oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man die Masszahlen des Tensors sich als Funktionen von x, y, z gegeben denkt und sie partiell nach x differenziert.[1]

Die drei Paare von Grenzflächen liefern mithin zusammen

$$-\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} \mathfrak{c}\mathfrak{a} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \mathfrak{a}\mathfrak{b}\right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

oder, indem wir, wie oben, den Operator

$$| \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$$

wie eine Plangrösse behandeln

$$-\mathfrak{T} \mid \nabla \Delta x \Delta y \Delta z \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Die Summe aller dieser Teile liefert, wenn man Δx, Δy, Δz sich der Null nähern lässt, das Raumintegral

$$-\int \mathfrak{T} \mid \nabla d\tau$$

unter $d\tau$, wie oben, das rechtsgewundene Raumelement verstanden. Mithin ist

$$\int \mathfrak{T} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{T} \mid \nabla d\tau = 0.$$

Wenn die Raumelemente $d\tau$ eines elastischen Körpers von den Kräften

$$\mathfrak{p} d\tau$$

angegriffen werden, wo $\mathfrak{p}$ das entsprechende Vektorfeld bedeutet, und wenn durch gewisse an der Oberfläche angebrachte Kräfte

$$\mathfrak{T} d\mathfrak{S}$$

jenen Kräften das Gleichgewicht gehalten wird, so muss

$$\int \mathfrak{T} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{p} d\tau = 0$$

sein. Dieselbe Gleichung muss aber auch gelten, wenn die beiden Integrale sich auf die Begrenzung und den Rauminhalt eines beliebigen Teils des elastischen Körpers beziehen. Denn, wenn wir diesen Teil herausschneiden, so müssen wir auf der Begrenzung die Kräfte $\mathfrak{T}\,d\mathfrak{S}$ anbringen, um alles im Gleichgewicht zu halten. Daher ist für jeden beliebigen Teil des Raumes

$$\int \mathfrak{p}\,d\tau = \int \mathfrak{T} \mid \nabla\,d\tau$$

und mithin

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{T} \mid \nabla.$$

Beim Spannungstensor hat demnach der Vektor

$$\mathfrak{T} \mid \nabla$$

die einfache Bedeutung der Kraft, berechnet auf die Raumeinheit, die in jedem Punkte des elastischen Körpers angreift.

Wird der Tensor $\mathfrak{T}$ auf die Form

$$\mathfrak{e}\mathfrak{a} + \mathfrak{f}\mathfrak{b} + \mathfrak{g}\mathfrak{c}$$

gebracht, so ist

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \mathfrak{T} . \nabla = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial z}.$$

Für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ wollen wir ein zu sich selbst reziprokes rechtsgewundenes System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ einsetzen, dann stellt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{T} \mid \nabla$$

die Gleichgewichtsbedingungen in der üblichen Form dar. Denn dann sind

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{T}\mathfrak{j}\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{T}\mathfrak{k}\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{T}\mathfrak{i}\mathfrak{j}$$

die drei auf die Flächeneinheit berechneten Spannungen in den Ebenen, die parallel zu $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ durch die betrachteten Punkte gelegt sind. In der Bezeichnung von Kirchhoff ist also

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} &= X_x\mathfrak{i} + Y_x\mathfrak{j} + Z_x\mathfrak{k} \\ \mathfrak{f} &= X_y\mathfrak{i} + Y_y\mathfrak{j} + Z_y\mathfrak{k} \\ \mathfrak{g} &= X_z\mathfrak{i} + Y_z\mathfrak{j} + Z_z\mathfrak{k} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \mid \nabla = &\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathfrak{i} \\ + &\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\mathfrak{j} \\ + &\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Wenn die auf die Raumeinheit wirkende Kraft $\mathfrak{p}$ in der Form

$$\mathfrak{p} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}$$

dargestellt ist, so schreibt sich also die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \mathfrak{p}$$

in der üblichen Form

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = X$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = Y$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial y} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = Z.$$

Die Form

$$\mathfrak{T} \mid \nabla$$

hat den grossen Vorzug vom Koordinatensystem unabhängig zu sein. Man braucht nur für ∇ seinen Wert in Koordinaten einzusetzen, um die Gleichgewichtsbedingungen für irgendein Koordinatensystem hinzuschreiben. Das gilt ebenso auch für krummlinige Koordinaten.

In diesem Falle hat man, wie schon oben in Kap. II, § 11, bemerkt, ebenso

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{e}^* + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathfrak{f}^* + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathfrak{g}^*$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \mathfrak{T} . \nabla = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \xi} \cdot \mathfrak{e}^* + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \eta} \cdot \mathfrak{f}^* + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \zeta} \cdot \mathfrak{g}^*.$$

Da
$$\frac{\partial \omega \mathfrak{e}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega \mathfrak{f}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega \mathfrak{g}^*}{\partial \zeta} = 0,$$

wie Kap. II, § 11, gezeigt wurde, so ist auch

$$\mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \omega \mathfrak{e}^*}{\partial \xi} + \mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \omega \mathfrak{f}^*}{\partial \eta} + \mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \omega \mathfrak{g}^*}{\partial \zeta} = 0.$$

Daher kann man für $\mathfrak{T} \mid \nabla$ auch schreiben:

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathfrak{T} . \omega \mathfrak{e}^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathfrak{T} . \omega \mathfrak{f}^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathfrak{T} . \omega \mathfrak{g}^*}{\partial \zeta}.$$

Die neun Masszahlen des Tensors werden zweckmässig mit Doppelindizes bezeichnet und dann wird man gut tun, dem entsprechend

auch die Veränderlichen statt durch Buchstaben $\mathfrak{x}$, η, ζ, durch die Indizes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ zu unterscheiden und ebenso die zugehörigen Vektoren mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ zu bezeichnen.

Sei

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\sigma^\lambda \mathfrak{e}^*_\sigma \mathfrak{e}_\lambda \text{ (Summe über } \lambda = 1, 2, 3 \text{ und } \sigma = 1, 2, 3\text{)},$$

so wird

$$\mathfrak{T} . \omega \mathfrak{e}^*_\lambda = \omega \mathfrak{T}_\sigma^\lambda \mathfrak{e}^*_\sigma \text{ (Summe über } \sigma = 1, 2, 3\text{)}$$

und mithin

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega \mathfrak{T}_\sigma^\lambda}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} \mathfrak{e}^*_\sigma + \mathfrak{T}_\sigma^\lambda \frac{\partial \mathfrak{e}^*_\sigma}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} \text{ (Summe } \lambda, \sigma\text{)}.$$

Christoffel schreibt für das skalare Produkt

$$-\frac{\partial \mathfrak{e}^*_\sigma}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} \cdot \mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{e}^*_\sigma \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}_\mu}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} = \mathfrak{e}^*_\sigma \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}_\lambda}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \text{ [1]}$$

das Zeichen

$$\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{Bmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\frac{\partial \mathfrak{e}^*_\sigma}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} = \left(\frac{\partial \mathfrak{e}^*_\sigma}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} \cdot \mathfrak{e}_\mu\right) \mathfrak{e}^*_\mu \text{ (Summe über } \mu = 1, 2, 3\text{)}$$

$$= -\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{Bmatrix} \mathfrak{e}^*_\mu$$

und

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \left(\frac{1}{\omega} \sum_\lambda \frac{\partial \omega \mathfrak{T}_\mu^\lambda}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} - \sum_{\lambda, \sigma} \mathfrak{T}_\sigma^\lambda \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{Bmatrix}\right) \mathfrak{e}^*_\mu \text{ (Summe über } \mu = 1, 2, 3\text{)}.$$

Ist also $\mathfrak{p}$ der Vektor der Kraft, so würde man die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathfrak{T} \mid \nabla = \mathfrak{p}$$

in krummlinigen Koordinaten in der Form schreiben

$$\mathfrak{p} . \mathfrak{e}_\mu = \sum_\lambda \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega \mathfrak{T}_\mu^\lambda}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} - \sum_{\lambda, \sigma} \mathfrak{T}_\sigma^\lambda \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{Bmatrix}$$

---

[1] Diese Gleichungen folgen aus $\mathfrak{e}^*_\sigma . \mathfrak{e}_\mu = 0$ oder 1 und aus $\frac{\partial \mathfrak{e}_\mu}{\partial \mathfrak{x}_\lambda} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{x}_\lambda \partial \mathfrak{x}_\mu}$.

$\mathfrak{p} \cdot e_\mu$ sind dabei die Masszahlen der Kraft in bezug auf das System e^*_μ.

Über die Herleitung der Ausdrücke

$$\left\{ {\lambda\mu \atop \sigma} \right\} = e^*_\sigma \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\lambda} = e^*_\sigma \cdot \frac{\partial e_\lambda}{\partial \xi_\mu}$$

mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden. Es ist

$$e^*_\sigma = \sum_\tau (e^*_\sigma \cdot e^*_\tau)\, e_\tau.$$

Daher

$$\left\{ {\lambda\mu \atop \sigma} \right\} = \sum_\tau (e^*_\sigma \cdot e^*_\tau)\left(e_\tau \cdot \frac{\partial e_\lambda}{\partial \xi_\mu}\right).$$

Sind also die Grössen $e^*_\sigma . e^*_\tau$ bekannt, so lassen sich die $\left\{ {\lambda\mu \atop \sigma} \right\}$ berechnen, so bald man die Grössen $e_\tau . \frac{\partial e_\lambda}{\partial \xi_\mu}$ gefunden hat. Diese letzteren kann man nun aus den Grössen $e_\tau . e_\lambda$ ermitteln. Es ist nämlich

$$\frac{\partial e_\tau . e_\lambda}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\mu} \cdot e_\lambda + e_\tau \cdot \frac{\partial e_\lambda}{\partial \xi_\mu}.$$

Durch zyklische Vertauschung von τ, λ, μ treten die Gleichungen hinzu

$$\frac{\partial e_\lambda . e_\mu}{\partial \xi_\tau} = \frac{\partial e_\lambda}{\partial \xi_\tau} \cdot e_\mu + e_\lambda \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\tau}$$

$$\frac{\partial e_\mu . e_\tau}{\partial \xi_\lambda} = \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\lambda} \cdot e_\tau + e_\mu \cdot \frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\lambda}.$$

Von den sechs Grössen der rechten Seiten sind je zwei einander gleich z. B. $\frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\mu} \cdot e_\lambda$ gleich $e_\lambda \cdot \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\tau}$, weil $\frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\tau} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\tau}$.

Multipliziert man nun die dritte Gleichung mit -1 und addiert alle drei, so erhält man

$$\frac{\partial e_\tau . e_\lambda}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial e_\lambda . e_\mu}{\partial \xi_\tau} - \frac{\partial e_\mu . e_\tau}{\partial \xi_\lambda} = 2\frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\mu} \cdot e_\lambda.$$

Die Grössen $\frac{\partial e_\tau}{\partial \xi_\mu} \cdot e_\lambda = \frac{\partial e_\mu}{\partial \xi_\tau} \cdot e_\lambda$ bezeichnet Christoffel mit $\left[{\mu\tau \atop \lambda} \right]$.

Es können also zunächst die Grössen $\begin{bmatrix}\mu\tau\\ \lambda\end{bmatrix}$ aus den Koeffizienten $\mathfrak{e}_\lambda . \mathfrak{e}_\mu$ des Ausdrucks

$$d\mathfrak{r} . d\mathfrak{r} = \sum (\mathfrak{e}_\lambda . \mathfrak{e}_\mu)\, d\xi_\lambda d\xi_\mu$$

ermittelt werden. Die $\mathfrak{e}^*_\lambda . \mathfrak{e}^*_\mu$ ergeben sich durch die Umkehrung der Gleichungen

$$\mathfrak{e}_\lambda = \sum_\mu (\mathfrak{e}_\mu . \mathfrak{e}_\lambda)\, \mathfrak{e}^*_\mu$$

oder auch aus

$$\mathfrak{e}^*_\lambda = \nabla \xi_\lambda .$$

Aus den $\begin{bmatrix}\mu\tau\\ \lambda\end{bmatrix}$ und $\mathfrak{e}^*_\lambda . \mathfrak{e}^*_\mu$ ergeben sich dann $\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \sigma\end{Bmatrix}$.

§ 16. Kogredienz und Kontragredienz.

Wenn man einen Vektor $\mathfrak{p}$ aus drei Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ numerisch abgeleitet hat

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{e} + y\mathfrak{f} + z\mathfrak{g}$$

und nun statt $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ drei andere Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einführt

$$\text{I.}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{e} &= a_1\mathfrak{a} + b_1\mathfrak{b} + c_1\mathfrak{c} \\ \mathfrak{f} &= a_2\mathfrak{a} + b_2\mathfrak{b} + c_2\mathfrak{c} \\ \mathfrak{g} &= a_3\mathfrak{a} + b_3\mathfrak{b} + c_3\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{p} = \xi\mathfrak{a} + \eta\mathfrak{b} + \zeta\mathfrak{c},$$

wo

$$\text{II.}\qquad \begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= c_1 x + c^2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass die neuen Masszahlen ξ, η, ζ zu den alten x, y, z keineswegs in derselben Beziehung stehen, wie die neuen Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu den alten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$. Wenn man dagegen die reziproken Einheitsvektoren $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ und die zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziproken $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ betrachtet, so zeigt sich, dass $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ aus $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ genau durch dieselben Gleichungen abgeleitet werden wie ξ, η, ζ aus x, y, z. Denn der Tensor $\mathfrak{T}$, der jeden Vektor unverändert lässt, kann, wie schon oben bemerkt, in der Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{e}\mathfrak{e}^* + \mathfrak{f}\mathfrak{f}^* + \mathfrak{g}\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*$$

geschrieben werden. Setzt man hier für $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ die Ausdrücke I ein und ordnet nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so erhält man

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{a}(a_1\mathfrak{e}^* + a_2\mathfrak{f}^* + a_3\mathfrak{g}^*) + \mathfrak{b}(b_1\mathfrak{e}^* + b_2\mathfrak{f}^* + b_3\mathfrak{g}^*)$$
$$+ \mathfrak{c}(c_1\mathfrak{e}^* + c_2\mathfrak{f}^* c_3\mathfrak{g}^*)$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^* &= a_1\mathfrak{e}^* + a_2\mathfrak{f}^* + a_3\mathfrak{g}^* \\
\mathfrak{b}^* &= b_1\mathfrak{e}^* + b_2\mathfrak{f}^* + b_3\mathfrak{g}^* \\
\mathfrak{c}^* &= c_1\mathfrak{e}^* + c_2\mathfrak{f}^* + c_3\mathfrak{g}^*,
\end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass die neuen reziproken Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ zu den alten reziproken Einheitsvektoren $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ in denselben Beziehungen stehen, wie die neuen Masszahlen ξ, η, ζ zu den alten x, y, z.

Leitet man den Vektor $\mathfrak{p}$ aus den reziproken Einheitsvektoren ab

$$\mathfrak{p} = x^*\mathfrak{e}^* + y^*\mathfrak{f}^* + z^*\mathfrak{g}^* = \xi^*\mathfrak{a}^* + \eta^*\mathfrak{b}^* + \zeta^*\mathfrak{c}^*,$$

so stehen die Masszahlen ξ^*, η^*, ζ^* zu x^*, y^*, z^* in denselben Beziehungen wie die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$. Denn setzt man für $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ ihre Ausdrücke durch $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$ ein und ordnet nach $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{f}^*$, $\mathfrak{g}^*$, so ergeben sich durch Vergleichung mit $x^*\mathfrak{e}^* + y^*\mathfrak{f}^* + z^*\mathfrak{g}^*$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x^* &= a_1\xi^* + b_1\eta^* + c_1\zeta^* \\
y^* &= a_2\xi^* + b_2\eta^* + c_2\zeta^* \\
z^* &= a_3\xi^* + b_3\eta^* + c_3\zeta^*,
\end{aligned}$$

die genau den Gleichungen I entsprechen. Um dies Verhalten der Masszahlen und Einheitsvektoren kurz zu bezeichnen, sagt man, „die Masszahlen transformieren sich **kontragredient** zu den Einheitsvektoren, auf die sie sich beziehen und **kogredient** zu den dazu reziproken Einheitsvektoren. Das Wort kogredient drückt also die gleiche Art der Transformation beim Übergang zu neuen Einheitsvektoren und neuen entsprechenden Masszahlen aus.

Wendet man laufende Indices zur Unterscheidung der verschiedenen Einheitsvektoren und verschiedenen Masszahlen an, so empfiehlt es sich, die Kontragredienz dadurch anzudeuten, dass der laufende Index das eine Mal oben, das andere Mal unten angebracht wird. Wir schreiben demnach

$$\mathfrak{p} = x^1\mathfrak{e}_1 + x^2\mathfrak{e}_2 + x^3\mathfrak{e}_3 = x_1\mathfrak{e}^1 + x_2\mathfrak{e}^2 + x_3\mathfrak{e}^3$$

und deuten also durch die Stellung des Index an, dass z. B. e_1, e_2, e_3 kontragredient zu e^1, e^2, e^3 und x^1, x^2, x^3, dagegen kogredient zu x_1, x_2, x_3 sind.

Zugleich empfiehlt es sich, zur Abkürzung die Summe nicht auszuschreiben, sondern nur

$$\mathfrak{p} = x^i e_i = x_i e^i$$

zu schreiben, wobei durch den doppelt vorkommenden Index i angedeutet sein soll, dass die Summe über $i = 1, 2, 3$ gemeint ist.

Analoges gilt von den Masszahlen und Einheiten eines Tensors. Wir schreiben

$$\mathfrak{T} = a^{ik} e_i e_k,$$

wobei die Indices i, k unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3 durchlaufen und die Summe über die neun Glieder zu erstrecken ist. Die neun Grössen a^{ik} sind die Masszahlen des Tensors und die neun Tensoren $e_i e_k$ sind die Einheiten, auf die sich die Masszahlen beziehen. Beim Übergang zu neuen Einheitsvektoren f_i, treten an Stelle der neun Einheitstensoren $e_i e_k$ die neuen Einheitstensoren $f_\lambda f_\mu$, die mit ihnen linear zusammenhängen.

$$\mathfrak{T} = a^{ik} e_i e_k = b^{\lambda\mu} f_\lambda f_\mu.$$

Die neuen Masszahlen $b^{\lambda\mu}$ sind dann ebenfalls linear durch die alten Masszahlen ausgedrückt.

Sei $$e_i = f_i^\lambda f_\lambda \text{ und demnach } f^\lambda = f_i^\lambda e^i,$$

wo wieder über den auf der rechten Seite oben und unten vorkommenden Index zu summieren ist. Dann ist

$$e_i e_k = f_i^\lambda f_k^\mu f_\lambda f_\mu \text{ und } f^\lambda f^\mu = f_i^\lambda f_k^\mu e^i e^k$$

und

$$\mathfrak{T} = a^{ik} f_i^\lambda f_k^\mu f_\lambda f_\mu = b^{\lambda\mu} f_\lambda f_\mu,$$

folglich

$$b^{\lambda\mu} = f_i^\lambda f_k^\mu a^{ik}.$$

Das heisst die a^{ik} transformieren sich beim Übergang zu neuen Einheitsvektoren kontragredient zu den $e_i e_k$ und kogredient zu den $e^i e^k$. Dies Verhalten der a^{ik} ist dadurch zum Ausdruck gebracht, dass beide Indices oben angesetzt sind. Bezieht man den Tensor $\mathfrak{T}$ auf die reziproken Einheiten $e^i e^k$, so werden die entsprechenden Masszahlen aus demselben Grunde mit unteren Indices bezeichnet

$$\mathfrak{T} = a^{ik}e_i e_k = a_{ik}e^i e^k.$$

Man kann auch für die vorderen Vektoren die e_i, für die hinteren die e^k einführen oder umgekehrt und erhält dann für denselben Tensor die Formen

$$\mathfrak{T} = a^i_k e_i e^k \text{ oder } \mathfrak{T} = \bar{a}^i_k e^k e_i.$$

Man nennt diese Formen „gemischt". Wenn der Tensor $\mathfrak{T}$ „sich selbst konjugiert oder symmetrisch" ist, so bleibt er, wie oben auseinandergesetzt wurde, bei der Vertauschung der beiden Vektoren in jedem seiner Glieder ungeändert. D. h. dann ist $a^{ik} = a^{ki}$, $a_{ik} = a_{ki}$ und $a^i_k = \bar{a}^i_k$. Ein symmetrischer Tensor besitzt also nur eine gemischte Form. Und umgekehrt, wenn ein Tensor nur eine gemischte Form besitzt, so ist er symmetrisch. Denn wenn man in der Form

$$\mathfrak{T} = a^i_k e_i e^k$$

in jedem Gliede die beiden Vektoren vertauschen kann, ohne dass der Tensor sich ändert, so ist er sich selbst konjugiert.

Ein antisymmetrischer Tensor geht ins Entgegengesetzte über, wenn man in jedem Gliede die beiden Vektoren vertauscht. Für einen antisymmetrischen Tensor ist also $a^{ik} = -a^{ki}$ und $a_{ik} = -a_{ki}$ und zugleich $a^{ii} = 0$, $a_{ii} = 0$. Wie wir oben gesehen haben, kann man die vektorielle Multiplikation eines Vektors $\mathfrak{p}$ mit einem zweiten Vektor dadurch ersetzen, dass man auf $\mathfrak{p}$ einen antisymmetrischen Tensor $\mathfrak{T}$ anwendet. Denn es wird, wenn

$$\mathfrak{T} = a^{ik}e_i e_k \text{ und } \mathfrak{p} = p_\lambda e^\lambda,$$

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{p} = a^{ik}e_i(e_k.\mathfrak{p}) = a^{ik}p_k e_i.$$

D. h. die Masszahlen des Vektors $\mathfrak{T}.\mathfrak{p}$ sind gleich den drei Summen $a^{ik}p_k$ oder ausgeschrieben

$$a^{11}p_1 + a^{12}p_2 + a^{13}p_3,\quad a^{21}p_1 + a^{22}p_2 + a^{23}p_3,\quad a^{31}p_1 + a^{32}p_2 + a^{33}p_3$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $a^{11} = a^{22} = a^{33} = 0$ und $a^{ik} = -a^{ki}$ ist:

$$a^{12}p_2 - a^{31}p_3,\quad -a^{12}p_1 + a^{23}p_3,\quad a^{31}p_1 - a^{23}p_2.$$

Das sind die Masszahlen des vektoriellen Produktes

$$\mathfrak{p} \times \mathfrak{q},$$

wo der Vektor $\mathfrak{q}$ gleich der Ergänzung der Plangrösse

$$\mathfrak{Q} = a^{23}e_2 e_3 + a^{31}e_3 e_1 + a^{12}e_1 e_2 \qquad \text{ist.}$$

Statt des Vektors $\mathfrak{p}$ kann man auch seine Ergänzung, die Plangrösse $\mathfrak{P} = \frac{p_1 e_2 e_3}{e_1 e_2 e_3} + \frac{p_2 e_3 e_1}{e_1 e_2 e_3} + \frac{p_3 e_1 e_2}{e_1 e_2 e_3}$ einführen und statt $\mathfrak{T}.\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ schreiben

$$\mathfrak{T}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}.$$

Jede Plangrösse $\mathfrak{Q}$ steht somit in einer engen Beziehung zu einem antisymmetrischen Tensor $\mathfrak{T}$ und umgekehrt. Die Plangrösse ist numerisch abzuleiten aus den drei äusseren Produkten $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ durch die drei entsprechenden Masszahlen a^{23}, a^{31}, a^{12}.

$$\mathfrak{Q} = a^{23} e_2 e_3 + a^{31} e_3 e_1 + a^{12} e_1 e_2.$$

Schreibt man a^{32}, a^{13}, a^{21} für $-a^{23}$, $-a^{13}$, $-a^{21}$, so kann man für $\mathfrak{Q}$ auch ebensogut setzen

$$\mathfrak{Q} = a^{32} e_3 e_2 + a^{13} e_1 e_3 + a^{21} e_2 e_1,$$

da die äusseren Produkte $e_3 e_2$, $e_1 e_3$, $e_2 e_1$ den äusseren Produkten $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ entgegengesetzt sind. Wenn man nun beide Ausdrücke addiert, so erhält man

$$2\mathfrak{Q} = a^{ik} e_i e_k,$$

wo sich die Summe auf der rechten Seite auf die Werte $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ erstreckt. Der antisymmetrische Tensor $\mathfrak{T}$ hat genau dieselbe Gestalt

$$\mathfrak{T} = a^{ik} e_i e_k,$$

nur bedeuten hier die sechs Grössen $e_i e_k$ nicht äussere Produkte, sondern die sechs Einheitstensoren, aus denen der antisymmetrische Tensor $\mathfrak{T}$ numerisch abgeleitet ist. Hier ist nicht $e_i e_k = - e_k e_i$, sondern die sechs Tensoren $e_i e_k$ sind voneinander numerisch unabhängig. Man erhält also, wie schon oben § 9 bemerkt wurde, aus dem antisymmetrischen Tensor die ihm entsprechende Plangrösse, wenn man die Einheitstensoren $e_i e_k$ durch die äusseren Produkte $e_i e_k$ ersetzt und durch zwei dividiert. In dem Ausdruck für $\mathfrak{T}$ kann man auch je zwei Terme mit $e_i e_k$ und $e_k e_i$ zusammenfassend schreiben

$$\mathfrak{T} = a^{23}(e_2 e_3 - e_3 e_2) + a^{31}(e_3 e_1 - e_1 e_3) + a^{12}(e_1 e_2 - e_2 e_1).$$

In dieser Form ist $\mathfrak{T}$ numerisch aus den drei antisymmetrischen Tensoren

$$e_2 e_3 - e_3 e_2, \quad e_3 e_1 - e_1 e_3, \quad e_1 e_2 - e_2 e_1$$

abgeleitet. D. h. man braucht nicht mehr als drei linear voneinander

unabhängige antisymmetrische Einheitstensoren. Die Masszahlen von $\mathfrak{T}$ in bezug auf diese drei antisymmetrischen Tensoren stimmen mit den Masszahlen der Plangrösse $\mathfrak{Q}$ in bezug auf die drei Einheitsplangrössen $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ überein. In den kontragredienten Einheiten geschrieben, hat man

$$\mathfrak{T} = a_{ik} e^i e^k \text{ und } \mathfrak{Q} = \frac{1}{2} a_{ik} e^i e^k,$$

wo wieder in dem Ausdruck für $\mathfrak{Q}$ jeder Term $e^i e^k$ das äussere Produkt der beiden Vektoren bedeutet. Durch den antisymmetrischen Tensor $\mathfrak{T}$, der zu einer Plangrösse $\mathfrak{Q}$ gehört, kann man also sowohl die vektorielle Multiplikation eines Vektors $\mathfrak{p}$ mit dem Vektor $\mathfrak{q}$, der die Ergänzung von $\mathfrak{q}$ darstellt, als auch das äussere Produkt einer Plangrösse $\mathfrak{P}$ mit der Plangrösse $\mathfrak{Q}$ ausdrücken. Denn es ist, wie wir oben sahen,

$$\mathfrak{T} . \mathfrak{p} = \mathfrak{p} . \mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{T}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}.$$

Es kann unter Umständen vorteilhaft sein, hiervon Gebrauch zu machen und das vektorielle Produkt oder das äussere Produkt zweier Plangrössen durch die Anwendung eines antisymmetrischen Tensors zu ersetzen.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ z. B. eines Punktes eines starren Körpers, der sich um eine Achse dreht, kann in der Form

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{T} . \mathfrak{r}$$

dargestellt werden. Dabei ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, der von irgendeinem Punkte der Achse zu dem betrachteten Punkte des Körpers führt. $\mathfrak{T}$ ist ein antisymmetrischer Tensor,

$$\mathfrak{T} = a^{ik} e_i e_k \quad (a^{ik} = -a^{ki})$$

und die Plangrösse

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} a^{ik} e_i e_k,$$

die aus $\mathfrak{T}$ hervorgeht, wenn wir $e_i e_k$ als äusseres Produkt auffassen, steht senkrecht auf der Drehungsachse und ihr numerischer Wert ist die Drehungsgeschwindigkeit. Der Drehungssinn ist dem Umlaufsinn von $\mathfrak{Q}$ entgegengesetzt.

Wir wollen als Beispiel die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt darstellen, wenn keine anderen Kräfte auf ihn einwirken, als dieser Bedingung entsprechen. Sei $\mathfrak{v}$ die Ge-

schwindigkeit des Massenteilchens dm und $\mathfrak{r}$ sein Ortsvektor von dem festen Punkt aus gerechnet. Dann ist die Summe der Drehimpulse

$$\int \mathfrak{r}\mathfrak{v}\,dm$$

eine konstante Plangrösse, die wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wollen. Für den Vektor $\mathfrak{v}$ setzen wir dabei

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{T}.\mathfrak{r} = a^{ik} x_k e_i,$$

so dass wir erhalten

$$\mathfrak{F} = a^{ik} t_k^\lambda e_\lambda e_i,$$

wo

$$t_k^\lambda = \int x^\lambda x_k\,dm, \quad \mathfrak{r} = x^\lambda e_\lambda = x_k e^k$$

gesetzt ist.

Die Grössen t_k^λ sind die Masszahlen eines symmetrischen Tensors

$$\mathfrak{T}' = t_k^\lambda e_\lambda e^k = \int \mathfrak{r}\mathfrak{r}\,dm.$$

Wir können daher die Einheitsvektoren so annehmen, dass sie in die Hauptachsen von $\mathfrak{T}'$ fallen und ein zu sich selbst reziprokes rechts gewundenes System bilden. Dieses System ist mit dem starren Körper fest verbunden, wie aus der Definition von $\mathfrak{T}'$

$$\mathfrak{T}' = \int \mathfrak{r}\mathfrak{r}\,dm$$

unmittelbar hervorgeht. Denn der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines jeden Teilchens dm ist mit dem Körper fest verbunden. $\mathfrak{T}'$ kann der Trägheitstensor des Körpers genannt werden. Seine Hauptachsen sind die Hauptträgheitsachsen für den festen Punkt des Körpers.

Für dieses zu sich selbst reziproke System brauchen wir die oberen und unteren Indices nicht mehr zu unterscheiden und ausserdem verschwinden die Masszahlen t_k^λ für k ungleich λ.

Die Plangrösse $\mathfrak{F}$, die den Gesamtdrehimpuls darstellt, lässt sich somit in der Form schreiben

$$\mathfrak{F} = a^{ik} t_k^k e_k e_i$$

oder ausführlich geschrieben, da $a^{ik} = -a^{ki}$,

$$\mathfrak{F} = a^{23}(t_3^3 + t_2^2) e_2 e_3 + a^{13}(t_1^1 + t_3^3) e_3 e_1 + a^{21}(t_2^2 + t_1^1) e_1 e_2.$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind in der Bedingung

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 0$$

vollständig enthalten, d. h. in der Bedingung, dass der Drehimpuls sich nicht ändern kann. Um sie für die Masszahlen aufzustellen, muss man beachten, dass die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i$ sich nach der Formel

$$\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt} = \mathfrak{T} . \mathfrak{e}_i = a^{ki} \mathfrak{e}_k$$

ändern. Denn wenn wir $\mathfrak{e}_i$ von dem festen Punkt aus abtragen, so bildet es den Ortsvektor eines im Körper festen Punktes, dessen Geschwindigkeit durch den Drehungstensor $\mathfrak{T}$ geliefert wird. Die Grössen $t^3_3 + t^2_2$, $t^1_1 + t^3_3$, $t^2_2 + t^1_1$ sind die drei Hauptträgheitsmomente, für die wir die Buchstaben A_1, A_2, A_3 schreiben wollen.

Die Differentiation des ersten Gliedes von $\mathfrak{F}$ liefert

$$A_1 \frac{d a^{32}}{dt} \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 + A_1 a^{32} a^{12} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_3 + A_1 a^{32} a^{13} \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_1 .$$

Die Differentialquotienten der anderen beiden Glieder ergeben sich durch zyklische Vertauschung. Die auf $\mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3$ bezügliche Masszahl von $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ wird somit gleich

$$A_1 \frac{d a^{32}}{dt} + (A_3 - A_2) a^{13} a^{21}.$$

Da nun das Verschwinden von $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ das Verschwinden seiner drei Masszahlen verlangt, so erhalten wir die Gleichung

$$A_1 \frac{d a^{32}}{dt} + (A_3 - A_2) a^{13} a^{21} = 0$$

und die beiden, die durch zyklische Vertauschung der Indices aus dieser hervorgehen.

Wie oben gezeigt, ist der Drehungssinn dem Umlaufsinn der Plangrösse

$$\mathfrak{Q} = a^{23} \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 + a^{31} \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_1 + a^{12} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2$$

entgegengesetzt. Will man also, wie es meistens geschieht, den Vektor $\mathfrak{q}$ einführen, der der Drehungsachse parallel ist und im Sinne einer Rechtsschraube die Drehungsgeschwindigkeit in der üblichen Weise darstellt, so hat man

$$\mathfrak{q} = - \mid \mathfrak{Q} = a^{32} \mathfrak{e}_1 + a^{13} \mathfrak{e}_2 + a^{21} \mathfrak{e}_3$$

zu setzen.

Diese Differentialgleichungen für die Masszahlen der Drehungsgeschwindigkeit sind zuerst von Euler aufgestellt. Um sie zu integrieren, und um die Gesetze der Bewegung zu erkennen, geht man am besten wieder auf die Plangrössen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{Q}$ zurück. Von $\mathfrak{J}$ wissen wir, dass sie konstant ist. Das Quadrat ihres numerischen Wertes ist mithin eine konstante skalare Grösse

$$\mathfrak{J} \mid \mathfrak{J} = c_1$$

Die Plangrösse $\mathfrak{Q}$ liefert mit $\mathfrak{J}$ die skalare Grösse

$$\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{J} = (a^{32})^2 A_1 + (a^{13})^2 A_2 + (a^{21})^2 A_3.$$

Da die Masszahlen von $\mathfrak{Q}$ die Drehungsgeschwindigkeiten um die drei Achsen darstellen und die Grössen A die Trägheitsmomente sind, so ist $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{J}$ die doppelte kinetische Energie und wir erhalten somit eine zweite skalare konstante Grösse

$$\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{J} = c_2.$$

Wir hätten beide Konstanten auch als Integrationskonstanten aus den Differentialgleichungen gewinnen können. Wir brauchen sie nur der Reihe nach mit a^{32}, a^{13}, a^{21} und mit $A_1 a^{32}$, $A_2 a^{13}$, $A_3 a^{21}$ zu multiplizieren und zu addieren, so erhalten wir die Gleichungen

$$A_1 a^{32} \frac{da^{32}}{dt} + A_2 a^{13} \frac{da^{13}}{dt} + A_3 a^{21} \frac{da^{21}}{dt} = 0$$

und

$$A_1^2 a^{32} \frac{da^{32}}{dt} + A_2^2 a^{13} \frac{da^{13}}{dt} + A_3^2 a^{21} \frac{da^{21}}{dt} = 0,$$

deren Integrale uns die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{J} \mid \mathfrak{J} = c_1 \text{ und } \mathfrak{Q} \mid \mathfrak{J} = c_2$$

liefern. Durch diese beiden Gleichungen lassen sich die drei Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit durch eine von ihnen algebraisch ausdrücken, die sich dann als elliptische Funktion von t ergibt[1]). Aber nicht deshalb heben wir diese Gleichungen hier hervor, sondern weil sie geeignet sind, uns eine anschauliche Vorstellung von der Bewegung zu geben.

Durch den symmetrischen Tensor

$$\mathfrak{T} = A_1 e_1 e_1 + A_2 e_2 e_2 + A_3 e_3 e_3$$

hängen die Ergänzungen von $-\mathfrak{J}$ und $-\mathfrak{Q}$

---

[1]) Vergleiche z. B. G. Kirchhoff, Mechanik, 7. Vorlesung, § 1.

$$\mathfrak{f} = -\,|\,\mathfrak{F} \text{ und } \mathfrak{q} = -\,|\,\mathfrak{Q}$$

miteinander zusammen.

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{T}.\mathfrak{q}$$

oder wie wir auch sagen können, $\mathfrak{f}$ ist der halbe Gradient der skalaren Funktion $(\mathfrak{T}.\mathfrak{q}).\mathfrak{q}$, die zu dem symmetrischen Tensor gehört (vergl. Kap. III, § 5). Die skalare Funktion ist gleich

$$(\mathfrak{T}.\mathfrak{q}).\mathfrak{q} = \mathfrak{f}.\mathfrak{q} = \mathfrak{F}\,|\,\mathfrak{Q} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2,$$

wo wir die Masszahlen von $\mathfrak{q}$ mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet haben.

Konstant gesetzt liefert sie die Gleichung des Trägheitsellipsoides. Den Vektor $\mathfrak{q}$, der die momentane Drehungsachse und durch seine Grösse die Drehungsgeschwindigkeit darstellt, können wir uns demnach als einen Radius vorstellen, der von dem festen Punkt zu einem Punkt des Ellipsoides

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = c_2$$

hinführt. Der Drehimpulsvektor $\mathfrak{f}$ muss dann als der halbe Gradient der skalaren Funktion die Richtung des Lotes haben, das wir von dem festen Punkt auf die Tangentialebene im Endpunkte von $\mathfrak{q}$ fällen. Dieses Lot ist demnach gleich

$$\frac{\mathfrak{f}.\mathfrak{q}}{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}\,\mathfrak{f} = \frac{c_2}{c_1}\,\mathfrak{f}.$$

Denn es hat die Richtung von $\mathfrak{f}$ und die Länge $\frac{\mathfrak{f}.\mathfrak{q}}{\sqrt{\mathfrak{f}.\mathfrak{f}}}$. Da nun sowohl $\mathfrak{f}$ wie $\mathfrak{f}.\mathfrak{q}$ konstant ist, so folgt, dass bei der Bewegung des starren Körpers dies Lot immer die gleiche Richtung und Länge haben muss, d. h. die Tangentialebene muss immer dieselbe bleiben. Das Ellipsoid kann mit andern Worten nur solche Lagen haben, in denen es die feste Tangentialebene berührt. Der Vektor, der von dem festen Mittelpunkt des Ellipsoides zu dem Berührungspunkt führt, gibt die momentane Drehungsachse und die Drehungsgeschwindigkeit an. Der Berührungspunkt liegt also in jedem Augenblick auf der Drehungsachse und hat daher die Geschwindigkeit Null. Denken wir uns die Reihenfolge der Berührungspunkte sowohl auf der Tangentialebene, wie auf der Oberfläche des Ellipsoides gezeichnet, so erhalten wir zwei Kurven, von denen die eine fest ist, die andere auf der ersten rollt. Die möglichen Kurven auf dem Ellipsoid sind algebraisch; denn sie sind Schnittlinien des Ellipsoides

$$\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{q} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = c_2$$

mit dem Ellipsoide

$$\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} = A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2 = c_1.$$

Um uns eine Vorstellung von dem Verlauf der Schnittlinien zu machen, wollen wir das Trägheitsellipsoid festhalten. Die Quadrate seiner Halbachsen sind

$$c_2/A_1,\ c_2/A_2,\ c_2/A_3.$$

Das Ellipsoid $\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} = c_1$, dagegen lassen wir sich verändern, indem wir c_1 wachsen lassen. Die Quadrate seiner Halbachsen sind

$$c_1/A_1^2,\ c_1/A_2^2,\ c_1/A_3^2.$$

Sei $A_1 < A_2 < A_3$, so ist bei beiden Ellipsoiden die erste Halbachse die grösste, die letzte die kleinste. Aber bei dem Ellipsoid $\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} = c_1$ sind die relativen Unterschiede der drei Achsen grösser, d. h. das Verhältnis der grössten zur mittleren oder zur kleinsten ist grösser als das entsprechende Verhältnis beim Trägheitsellipsoid. Der kleinste Wert von c_1, bei dem die beiden Ellipsoide gemeinsame Punkte erhalten, wird daher der sein, für den die grössten Achsen zusammenfallen

$$c_1/A_1^2 = c_2/A_1 \text{ oder } c_1 = c_2 A_1,$$

der grösste Wert von c_1, bei dem sie noch gemeinsame Punkte erhalten, ist der, für den die kleinsten Achsen zusammenfallen

$$c_1/A_3^2 = c_2/A_3 \text{ oder } c_1 = c_2 A_3.$$

Wächst c_1 ein wenig über den kleinsten Wert hinaus, so besteht die Schnittlinie aus zwei geschlossenen Kurven, welche um die Endpunkte der grössten Achse des Trägheitsellipsoides laufen und ist c_1 ein wenig kleiner als der grösste Wert, so besteht die Schnittlinie aus zwei geschlossenen Kurven, welche um die Endpunkte der kleinen Achse laufen. Lässt man c_1 von dem kleinsten Wert $c_2 A_1$ bis zu dem grössten $c_2 A_3$ wachsen, so müssen die geschlossenen Kurven der ersten Art in die der zweiten Art übergehen. Der Übergang wird durch die Schnittkurve gebildet, die wir für $c_1 = c_2 A_2$ erhalten, wo die beiden Ellipsoide sich in den Endpunkten der mittleren Achse berühren. Die Schnittlinie hat in diesen Endpunkten zwei Doppelpunkte. Sie teilt die Fläche des Trägheitsellipsoides in vier getrennte Teile. Zwei Teile, welche die kleinste

Achse umgeben, liegen ausserhalb des Ellipsoides $\mathfrak{f}.\mathfrak{f} = c_2 A_2$ und zwei Teile, welche die grösste Achse umgeben, liegen innerhalb. Für $c_1 < c_2 A_2$ läuft die Schnittlinie um die grosse Achse, für $c_1 > c_2 A_2$ um die kleine.

Bei den Rotationen um die Hauptachsen ist $\mathfrak{q} = \pm \sqrt{\frac{c_2}{A_1}}\, \mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{q} = \pm \sqrt{\frac{c_2}{A_2}}\, \mathfrak{e}_2$ oder $\mathfrak{q} = \pm \sqrt{\frac{c_2}{A_3}}\, \mathfrak{e}_3$ und dementsprechend $\mathfrak{f} = A_1 \mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{f} = A_2 \mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{f} = A_3 \mathfrak{q}$. In allen drei Fällen sind die Bewegungsgleichungen erfüllt, wenn der Drehungsvektor $\mathfrak{q}$ konstant angenommen wird. Aber es besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der Rotation um die mittlere Achse und den Rotationen um die beiden anderen Achsen. Eine kleine Änderung des Drehungsimpulses $\mathfrak{f}$ z. B. durch einen kleinen Stoss wird den Drehungsvektor $\mathfrak{q}$ aus der Hauptachse ein wenig herauswerfen. Bei den äusseren Achsen wird sein Endpunkt dann auf dem Trägheitsellipsoid eine kleine geschlossene Kurve um den Endpunkt der betreffenden Achse beschreiben, so dass er immer in der Nähe der Achse bleibt. Und da auch die Normale des Trägheitsellipsoides in der Nähe der Achse nur kleine Winkel mit ihr bildet, so wird sich die Achse bei der Bewegung des starren Körpers nur wenig von dem konstanten Impulsvektor $\mathfrak{f}$ entfernen können. Bei der mittleren Achse dagegen wird der Endpunkt von $\mathfrak{q}$ auch durch einen noch so kleinen Stoss auf eine Kurve geworfen werden können, auf der er bis in die Nähe des entgegengesetzten Endpunktes der Achse gelangt, so dass der Drehungsvektor in den Zwischenlagen alle Winkel mit der mittleren Achse bildet.



GEDRUCKT BEI POESCHEL & TREPTE IN LEIPZIG

